

ANALES DE LA SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

ADOPTADOS PARA SUS PUBLICACIONES POR LA
ACADEMIA NACIONAL DE CIENCIAS EXACTAS, FISICAS Y NATURALES

DIRECTOR: EMILIO REBUELTO

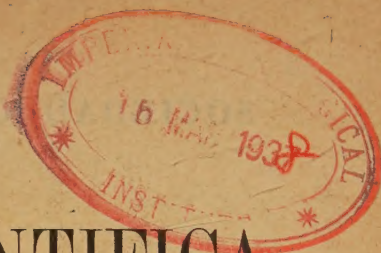
ENERO 1938. — ENTREGA I. — TOMO CXXV

SUMARIO

	<u>Pág.</u>
MATEMATICAS:	
J. HADAMARD. — Sur certaines questions de calcul integral	1
J. C. VIGNAUX. — Algunas fórmulas fundamentales para las funciones polígenas de una y varias variables	19
ANTONIO VALEIRAS. — Una propiedad fundamental de la curva de Vi- viani, y otras cuestiones conexas	30
QUIMICA:	
REINALDO VANOSSI Y RAÚL FERRAMOLA. — Microdeterminación cerimé- trica de glucosa sobre 0,01 ml. de sangre	41
P. MAGNE DE LA CROIX. — El cobre en el ser humano	50
MME. A. CANNONI DE DEGIORGI ET ENRIQUE V. ZAPPI. — Sur quelques nouveaux dérivé fluorés aromatique	54
CIENCIAS NATURALES:	
LENCASTRE PEREIRA DE ANDRADE. — A influencia das conquistas e des- cobrimentos dos portugueses no conhecimento das plantas	64
CARLOS RUSCONI. — Sobre los roedores <i>Platacomys</i> y <i>Pseudoplatacomys</i>	74
BIBLIOGRAFIA por N. B. M.	79

BUENOS AIRES
CALLE SANTA FÉ 1145

1938



SOCIEDAD CIENTIFICA ARGENTINA

SOCIOS HONORARIOS

Dr. Pedro Visca †
 Dr. Mario Isola †
 Dr. Germán Burmelster †
 Dr. Benjamín A. Gould †
 Dr. R. A. Phillippi †
 Dr. Guillermo Rawson †
 Dr. Carlos Berg †
 Dr. Valentín Balbín †
 Dr. Florentino Ameghino †

Dr. Carlos Darwin †
 Dr. César Lombroso †
 Ing. Luis A. Huerdo †
 Ing. Vicente Castro †
 Dr. Juan J. J. Kyle †
 Dr. Estanislao S. Zeballos †
 Ing. Santiago E. Barabino †
 Dr. Carlos Spegazzini †
 Dr. J. Mendizábal Tamborel †

Dr. Enrique Ferri †
 Ing. Eduardo Huerdo †
 Ing. Guillermo Marconi †
 Dr. Walter Nernst
 Dr. Eduardo L. Holmberg †
 Dr. Alberto Einstein
 Dr. Angel Gallardo †
 Dr. Cristóbal M. Hicken †

CONSEJO CIENTIFICO

Ing. Félix Aguilar; Ing. José Babini; Dr. Rómulo D. Carbia; Dr. Horacio Damianovich;
 Dr. Claro C. Dassen; Prof. Carlos E. Dieulefait; Dr. Juan A. Domínguez; Dr. Gustavo
 A. Fester; Dr. Alfredo Franceschi; Dr. Joaquín Frenguelli; Dr. Josué Gollán (h.);
 Dr. Bernardo A. Houssay; Dr. Cristofredo Jakob; Dr. Ramón G. Loyarte; Dr. Emi-
 liano J. Mac Donagh; Dr. R. Armando Marotta; Dr. Julio Méndez; Ing. Agr. Lorenzo
 R. Parodi; Dr. Franco Pastore; Capitán de fragata Héctor R. Ratto; Dr. Rodolfo
 Rivarola; Vicealmirante Segundo R. Storni; Dr. Enrique V. Zappi.

JUNTA DIRECTIVA

(1937-1938)

<i>Presidente</i>	Ingeniero Jorge W. Dobranich
<i>Vicepresidente 1º</i>	Ingeniero Evaristo V. Moreno
<i>Vicepresidente 2º</i>	Doctor Gonzalo Bosch
<i>Secretario de Actas</i>	Doctor Antonio Casacuberta
<i>Secretario de Correspondencia</i>	Doctor Santiago Barabino Amadeo
<i>Tesorero</i>	Arquitecto Carlos E. Gécneau
<i>Pro-tesorero</i>	Profesor José F. Molino
<i>Bibliotecario</i>	Ingeniero José S. Gandolfo
	Ingeniero Carlos Posadas
	Doctor Juan Ubaldo Carrea
	Doctor Reinaldo Vanossi
	Ingeniero Mario L. Negri
<i>Vocales</i>	Doctor Angel H. Roffo
	Capitán de Fragata Héctor R. Ratto
	Doctor Jorge Magnin
	Ingeniero Ricardo J. Gutiérrez

ADVERTENCIA. — Los colaboradores de los Anales son personalmente responsables de la tesis sustentada en sus escritos. Tienen derecho a la corrección de dos pruebas. Los que deseen tirada aparte de 50 ejemplares de sus artículos, deben solicitarla por escrito. Los manuscritos, correspondencia, etc., se enviarán a la sede social, Santa Fe 1145.

SUR CERTAINES QUESTIONS DE CALCUL INTEGRAL

PAR J. HADAMARD

Les sujets dont je me propose de m'occuper ici soulèvent l'un et l'autre les mêmes observations d'ordre pédagogique. Dans les deux cas, le mode de démonstration qui s'offre comme naturellement lié à la nature de la question a dû être rejeté, au moins dans les Traités classiquement mis entre les mains des étudiants, en raison des objections bien connues auxquelles il se heurte au point de vue de la rigueur, de sorte que le problème est abordé par des voies assez détournées et tout à fait artificielles.

J'ai moi-même suivi ces voies dans mon *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique* tel qu'il a été publié; mais dans l'enseignement que j'ai donné à cette Ecole cette année, j'ai pu surmonter la difficulté: je vais indiquer ici comment j'y suis parvenu.

I

1. Il s'agit, dans les deux cas, d'intégrales multiples. Une remarque préliminaire s'impose à cet égard. Pour traiter en toute rigueur de pareilles intégrales, on sait qu'il faut commencer par préciser, avec Jordan, la forme des domaines sur lesquels elles peuvent porter. Pour l'intégrale double, par exemple, il faut que le domaine d'intégration D soit quarrable au sens de Jordan-Lebesgue: ceci signifie qu'on doit pouvoir lui inscrire des polygones (ou ensembles de polygones) p_i et lui circonscrire des polygones (ou ensembles de polygones) p_e de manière que la différence $p_e - p_i$ des aires d'une figure polygonale circonscrite et d'une figure polygonale inscrite puisse être rendue aussi petite que l'on veut; de même, le domaine D auquel sera étendue une intégrale triple devra être tel qu'on puisse tracer à son intérieur des figures polyédrales p_i et le comprendre à l'intérieur de figures polyédrales p_e de manière que la différence $p_e - p_i$ entre les volumes inscrits et circonscrits soit arbitrairement petite; etc.

Ces propriétés sont présumées dans la définition même de l'intégrale multiple: soit qu'on les admette implicitement, soit qu'on juge utile de les préciser, elles doivent être considérées, et nous les considérons, comme acquises au moment où on aborde les deux sujets qui vont nous occuper.

Nous pourrions même supposer que p_i et p_e sont des ensembles de rectangles ayant leurs côtés parallèles aux axes, ou de parallélépipèdes rectangles ayant leurs faces parallèles aux plans coordonnés, etc.; cette hypothèse n'est pas en réalité plus restrictive que la précédente, et l'une se ramène sans difficulté à l'autre (comme on le voit en opérant d'abord sur un triangle).

L'aire ou le volume, définis comme limites communes de p_i et de p_e , possèdent évidemment la propriété classique d'être dans une homothétie, multipliés par une puissance du rapport de similitude.

2. Parlons d'abord du *changement de variables dans les intégrales multiples*. La véritable origine de la formule obtenue est dans le fait que le jacobien d'une transformation ponctuelle, pris en valeur absolue, représente le rapport de deux aires infiniment petites correspondantes, ou, s'il s'agit d'intégrales triples, de deux volumes infiniment petits correspondants. Dans le plan, par exemple, soient

$$X = f(x, y) \quad , \quad Y = g(x, y)$$

la transformation ponctuelle; $m(x, y)$, $M(X, Y)$, deux points correspondants; $m'(x + dx, y + dy)$, $m''(x + \delta x, y + \delta y)$, deux points voisins de m , ayant pour images respectives

$$M'(X + dX, Y + dY) \quad , \quad M''(X + \delta X, Y + \delta Y)$$

En supposant les fonctions f, g pourvues de dérivées premières continues, la formule des accroissements finis donne

$$\begin{aligned} dX &= A dx + B dy + \eta_1 l_1 \quad , \quad dY = C dx + D dy + \eta'_1 l_1 \\ \delta X &= A \delta x + B \delta y + \eta_2 l_2 \quad , \quad \delta Y = C \delta x + D \delta y + \eta'_2 l_2 \end{aligned} \quad [1]$$

où A, B, C, D sont les valeurs des dérivées partielles en m ; l_1, l_2 les longueurs $\overline{mm'}$, $\overline{mm''}$ et où

$$\eta_1 = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_{x_1=x+\theta_1 dx, y_1=y+\theta_1 dy} - \frac{\partial f}{\partial x} \right] \frac{dx}{l_1} + \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y} \right] \frac{dy}{l_1}, \eta'_1, \eta_2, \eta'_2$$

tendent vers zéro ⁽¹⁾ avec l_1, l_2 . Ces formules montrent, du moins si le parallélogramme $mm'm''m'''$ ne s'aplatit pas indéfiniment, que le rapport

$$\frac{dX \delta Y - dY \delta X}{dx \delta y - dy \delta x}$$

de ce parallélogramme à celui qui a pour côtés MM', MM'' tend vers j lorsque l_1 et l_2 tendent simultanément vers zéro.

3. Le résultat précédent conduit évidemment à écrire la formule classique pour le changement de variables sous le signe $\int \int$. Il n'en constitue pas cependant une démonstration satisfaisante, au moins au premier abord, et l'on a, jusqu'ici, présenté la démonstration autrement. Deux méthodes sont connues: l'une ⁽²⁾ consistant à faire successivement un changement de variable sur x seul et un changement de variable sur y seul; l'autre ⁽³⁾ dans laquelle on obtient l'aire S de l'image d'une portion s du premier plan en la ramenant à une intégrale étendue à la frontière de s et établissant ainsi la formule $S = sj'$ où j' est compris entre le minimum et le maximum de j dans l'aire s : formule qui entraîne, sans nouvelle difficulté, celle du changement de variables ⁽⁴⁾.

4. Ne peut-on obtenir une démonstration rigoureuse de cette dernière en partant du fait fondamental noté au n° 2?

Remarquons d'abord que les formules [1] peuvent encore être écrites si $(\overline{mm'})$ et $(\overline{mm''})$ tendant toujours vers zéro) le point m , au lieu d'être fixe, varie d'une manière quelconque à l'intérieur de la région D où nous avons supposé les dérivées premières de f et de g continues (ou, plus exactement, de manière que le parallélogramme dont nous partons soit compris à l'intérieur de cette région). Cela résulte, étant données les expressions de η_i, η'_i , de ce que, d'après un théorème connu, la continuité de ces dérivées est uniforme.

5. Raisonnons, non plus sur le parallélogramme de côtés MM', MM'' mais sur la figure $MM'M''M'''$ (quadrilatère curviligne) ou S , image du petit parallélogramme du premier plan.

(1) Si f, g admettent des dérivées secondes inférieures en valeur absolue à un nombre fixe K , $|\eta_i|, |\eta'_i|$ sont plus petites que $4Kl_i$.

(2) Voir le *Calcul différentiel* de JOSEPH BERTRAND et notre *Cours d'Analyse*, tome I, n° 151.

(3) Voir GOURSAT, *Cours d'Analyse*, tome I.

(4) GOURSAT, *loc. cit.*

Nous pourrions d'ailleurs, en vue de ce qui va suivre, nous borner au cas où ce premier parallélogramme $mm'm''m'''$, ou s , est un rectangle de côtés parallèles aux axes et supposer, en outre, que ce parallélogramme devient infiniment petit en restant constamment homothétique à lui-même, de sorte que l'on pourra prendre $l_1 = \varepsilon \lambda_1$, $l_2 = \varepsilon \lambda_2$, en désignant par λ_1, λ_2 deux longueurs fixes et par ε un infiniment petit que l'on pourra prendre comme infiniment petit principal.

Nous pourrions, pour simplifier l'écriture, rapporter le rectangle s à ses côtés issus de m et son image S à des axes issus de M , de sorte que, à la limite, l'origine des coordonnées sera m_o dans le premier plan, M_o dans le second.

En même temps que les figures s et S , on pourra considérer leurs homothétiques dans le rapport (infiniment grand) $1/\varepsilon$. Autrement dit $(\bar{x}, \bar{y})$ étant un point quelconque de s ; $(\bar{X}, \bar{Y})$ son image, posons

$$\bar{x} = x + \varepsilon \xi, \quad \bar{y} = y + \varepsilon \eta, \quad \bar{X} = X + \varepsilon \Xi, \quad \bar{Y} = Y + \varepsilon H \quad [3]$$

La figure σ , lieu du point (ξ, η) et homothétique de s , est donc un rectangle invariable de côtés λ_1, λ_2 . Quant au point (ΞH) ses coordonnées seront, d'après les formules [1], de la forme

$$\Xi = A \xi + B \eta + \tau_1, \quad H = C \xi + D \eta + \tau_1' \quad [3']$$

En bornant les seconds membres à leurs termes linéaires, on a une transformation affine qui change σ en un parallélogramme Σ_o fixe, c'est à dire indépendant de ε et qui varie même peu ⁽¹⁾ lorsque m tend vers une position fixe m_o . Les termes complémentaires tendront vers zéro,

$$\tau_1 = \frac{2 \eta_1}{\varepsilon} \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = 2 \eta_1 \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

et τ_1' étant inférieurs en valeur absolue à une quantité $\tau(\varepsilon)$ qui tend vers zéro ⁽²⁾ avec ε .

(1) On peut même considérer Σ_o comme fixe dans ces conditions, les variations de A, B, C, D se traduisant par des termes correctifs de même forme que ceux qui figurent dans [3'], puisqu'elles sont infiniment petites en même temps que la distance $\overline{mm_o}$.

(2) Si les fonctions f, g admettent des dérivées partielles du second ordre inférieures en valeur absolue à K , on peut prendre

$$\tau(\varepsilon) = 8 K \varepsilon \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$$

Si nous menons des parallèles à chaque côté de Σ_o , de part et d'autre de ce côté, à la distance $\tau(\epsilon)$, nous aurons deux nouveaux parallélogrammes infiniment peu différents de Σ_o , délimités, l'un, Σ_i , par les parallèles intérieures; l'autre Σ_e , par les parallèles extérieures. La figure Σ sera comprise à l'intérieur de Σ_e et comprendra Σ_i à son intérieur ⁽¹⁾. Donc, lorsque ϵ tendra vers zéro, son aire sera infiniment peu différente de celle de Σ_o (et cela uniformément quelle que soit la position de m). Quant à la figure S , image de s et homothétique de Σ , on voit qu'elle est comprise entre celles des parallélogrammes S_i et S_e , homothétiques de Σ_i et de Σ_e , et qu'on peut, par conséquent, la remplacer par la quantité $S_o = js$ avec une erreur relative inférieure à un nombre ϑ qui tend vers zéro ⁽²⁾.

6. Ceci suffit pour établir la formule du changement de variables, c'est-à-dire pour transformer l'intégrale double (où Φ est une fonction bornée et continue) $\int \int_s \Phi(X, Y) dXdY$ étendue à une certaine aire S du plan des XY en une intégrale analogue relative à l'aire correspondante s du premier plan (la correspondance étant supposée biunivoque), dans le cas où cette dernière aire s est un rectangle de côtés parallèles aux axes.

Divisons, en effet, chacun des côtés du rectangle s en n parties égales, ce qui permet de diviser le rectangle lui-même, à l'aide de

(1) Le premier point ressort immédiatement des constatations du texte.

Le second, c'est à dire le fait que tout point situé dans S_i est l'image d'un point de s ou, ce qui revient au même, que tout point situé dans Σ_i est homothétique d'une telle image, est, au fond, une forme du théorème de Jordan (que, le plus souvent, on admet implicitement dans l'enseignement). On peut l'établir en se passant de ce théorème ou, plus exactement, en ne l'utilisant que pour dans le cas d'un parallélogramme, où sa démonstration est élémentaire: on remarquera, pour cela, qu'il existe certainement des points μ_o de Σ_i qui correspondent à des points de s ; tel est, par exemple, l'homothétique de l'image du centre du rectangle s , point qui est aussi voisin qu'on le veut du centre de Σ_i . Soit alors μ un autre point intérieur à Σ_i : au trait rectiligne $\mu_o\mu$ correspond, dans s (d'après le théorème des fonctions implicites), une ligne continue qui ne peut sortir de s , puisqu'il lui faudrait, pour cela (ξ et η étant continus sur cette ligne), traverser l'un des côtés $\xi = 0$, $\xi = \lambda_1$, $\eta = 0$, $\eta = \lambda_2$ de ce rectangle et que les homothétiques des images de ces côtés sont à l'extérieur de Σ_i .

(2) Le rapport de la quadruple bande comprise entre Σ_e et Σ_o à l'aire de Σ_o lui-même (de même, à fortiori que le rapport analogue pour la bande comprise entre Σ_o et Σ_i) est inférieur en valeur absolue à

$$\frac{1}{j} \left[\frac{4\tau^2 + 2\tau(\lambda_1\sqrt{A^2 + C^2} + \lambda_2\sqrt{B^2 + D^2})}{\lambda_1\lambda_2} \right]$$

parallèles aux côtés menées par ces points de division, en n^2 rectangles partiels (s) égaux entre eux et homothétiques au premier. Dans le plan des XY , ces rectangles partiels auront pour images des figures (S) comprises chacune à l'intérieur d'un parallélogramme (S_e), comprenant chacune à son intérieur un parallélogramme (S_i) et dont on pourra, en conséquence, remplacer l'aire par $(j)s/n^2$, avec une erreur relative inférieure à la quantité ϑ ⁽¹⁾ infiniment petite avec $1/n$, (j) étant la valeur du jacobien en l'un des sommets du rectangle partiel. C'est une telle aire que nous devons multiplier par la valeur de la fonction $\varphi(x, y) = \Phi[f(x, y), g(x, y)]$ en ce sommet, pour faire ensuite la somme des produits obtenus et passer à la limite pour $n \rightarrow \infty$. Si (comme on sait qu'on en a le droit sans diminuer la généralité) on suppose la fonction à intégrer Φ constamment positive, l'erreur relative commise sur la somme sera inférieure à l'erreur relative maxima commise sur un terme quelconque, donc tendra vers zéro et l'on aura bien

$$\begin{aligned} \iint_S \Phi(X, Y) dX dY &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^{n^2} (S) \Phi(X, Y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (1 + \vartheta') \sum_1^{n^2} (j) s \varphi(x, y) \right\} = \quad (|\vartheta'| < |\vartheta|) \\ &= \iint j \varphi(x, y) dx dy \quad C. Q. F. D. \quad [4] \end{aligned}$$

6 bis. Toutefois, il faut, en toute rigueur, l'observer, le fait du n° 5 n'est établi et n'a même de sens que si la figure S , image du rectangle s , est quarrable. Mais c'est ce qui résulte de la construction du n° précédent. Celle-ci nous montre en effet la figure S comme comprise à l'intérieur d'un ensemble de parallélogrammes S_e et comprenant un ensemble de parallélogrammes S_i , ces derniers tous extérieurs les uns aux autres (puisque compris respectivement à l'intérieur des diverses figures (S) lesquelles, par hypothèse, ne se recouvrent pas mutuellement). Le rapport de l'aire polygonale ainsi circonscrite à l'aire inscrite étant inférieure à $\frac{1 + \vartheta}{1 - \vartheta}$ et tendant, par conséquent, vers l'unité, l'aire S possède bien la propriété voulue.

(1) D'après l'évaluation de ϑ (Note précédente), la convergence de cette quantité vers zéro est bien uniforme dans toute la région considérée.

7. Une fois établie pour un rectangle parallèle aux axes, la formule l'est par cela même, pour un ensemble de tels rectangles.

D'autre part, toute aire quarrable peut être approchée intérieurement par un ensemble p_i de rectangles inscrits et extérieurement par un ensemble p_e circonscrit, la différence $\Delta p = p_e - p_i$ tendant vers zéro. L'image ΔP de Δp aura aussi une aire qui tendra vers zéro comme le montre la formule [4], avec $\Phi = 1$, laquelle est applicable à la figure Δp , qui est elle même une forme de rectangles parallèles aux axes. Les intégrales doubles suivant Δp et suivant ΔP tendant également vers zéro, puisque φ est supposée bornée, la formule relative à l'aire quarrable s dérive de celle qui est relative à p_i par passage à la limite.

Tous ces raisonnements, exposés sur le cas des intégrales doubles, s'étendent d'eux mêmes au changement de variables dans une intégrale multiple d'ordre quelconque.

II

8. Nous examinerons, en second lieu, la définition de l'aire d'une surface courbe. L'idée qui se présente naturellement est de définir une telle aire comme limite de celle d'une surface polyédrale inscrite, par analogie avec la longueur d'un arc de courbe définie comme limite du périmètre d'une ligne polygonale inscrite. On sait que cette méthode se heurte à l'objection classique de Schwarz.

Ceci signifie qu'il ne suffit pas d'imposer à la surface polyédrale les conditions :

a) Les surfaces polyédrales considérées Σ devront avoir tous leurs sommets sur la surface courbe donnée S , leurs contours étant des lignes polygonales inscrites dans le contour de S (si cette dernière n'est pas fermée) ;

Les faces des surfaces polyédrales devront tendre vers zéro dans toutes leurs dimensions, et elles devront avoir des sommets aussi voisins que l'on voudra (à partir d'un certain moment) d'un point arbitrairement choisi sur S ; mais qu'il faut y adjoindre les conditions ;

b) Les angles que fait le plan d'une face quelconque avec le plan tangent à S en chacun de ses sommets devront tendre (uniformément) vers zéro (c'est à dire que le plus grand de ces angles, pour l'une des surfaces polyédrales, devra tendre vers zéro à mesure que ces surfaces polyédrales se succéderont) ;

c) *Tous les dièdres des surfaces polyédrales devront* ⁽¹⁾ *tendre uniformément vers π .*

Ces conditions sont distinctes de a), comme le montre l'exemple de Schwarz pour la première d'entre elles, alors que les conditions correspondantes relatives à une ligne polygonale inscrite dans un arc de courbe sont vérifiées d'elles mêmes lorsque les côtés de la ligne tendent tous vers zéro et que ses sommets se succèdent dans leur ordre naturel sur la courbe. On doit, ici, les incorporer dans l'hypothèse. Par contre, une fois stipulées toutes ces conditions, et moyennant des hypothèses simples sur la forme de S , on peut aisément démontrer que l'étendue de l'aire polyédrale tend bien vers une limite, toujours la même, quelle que soit la loi d'inscription sous les conditions précédentes, et représentable par une intégrale double.

9. Nous supposerons que le plan tangent à S varie d'une manière continue ⁽²⁾.

De plus, pour commencer, nous admettrons que la portion de surface en question n'est coupée qu'en un point au plus par une parallèle à l'axe des z . Nous supposerons même qu'aucun de ces plans tangents n'est parallèle à l'axe des z .

Autrement dit, l'aire courbe S est en correspondance biunivoque avec sa projection s sur le plan des x, y et sans points de contour apparent relativement à ce plan. Elle est représentable par une équation $z = f(x, y)$, la fonction f ayant, en chaque point de s , des dérivées partielles p, q finies et continues.

L'angle du plan tangent avec l'axe des z aura donc un minimum $2\gamma_0$ effectivement atteint et, par conséquent, différent de zéro. Les plans des faces des surfaces Σ polyédrales feront, avec ce même axe, à partir d'un certain moment, un angle supérieur à γ_0 , en vertu de la condition b).

(1) Sans cela, on pourrait, autant de fois qu'on le voudrait, ajouter à Σ une surface polyédrale fermée inscrite ayant une arête commune avec Σ ou remplacer une face Σ_k par une nouvelle surface polyédrale inscrite (non intérieure à Σ_k) limitée au même contour que Σ_k et d'étendue ne tendant pas vers zéro. Il y a là une difficulté analogue à celle qu'a soulevée Schwarz, mais qui en est distincte.

(2) Les hypothèses que nous faisons ici sur la forme S sont également utilisées dans la plupart des démonstrations classiques, où l'ont fait correspondre à chaque portion de l'aire courbe une portion du plan tangent en l'un de ses points, l'étendue de S étant définie comme la somme des aires de ces écailles... mal jointes.

Un tel plan fera nécessairement, avec le plan projetant l'une des arêtes qu'il contient, un angle obtus inférieur à $\pi - \gamma_0$: il en résulte, en vertu de la condition c), que deux faces adjacentes de Σ se projetteront suivant deux polygones adjacents du plan des xy (c'est à dire suivant deux polygones situés de part et d'autre du côté commun). L'ensemble de ces polygones partiels $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ formera un polygone total σ inscrit dans le contour de s et dont, ses côtés tendant tous vers zéro, l'aire tendra vers celle de s .

10. Une quelconque Σ_k des facettes polyédrales est liée à sa projection σ_k sur le plan des xy par le théorème bien connu de géométrie élémentaire qui donne

$$\Sigma_k = \frac{\sigma_k}{\cos(v_k, z)} \quad [5]$$

en désignant par v_k la normale au plan de la facette prise dans le sens qui fait avec la direction positive Oz un angle aigu: la somme des termes [5] qui fournit l'aire polyédrale Σ est une somme arithmétique. Dans ces conditions, il va être aisé de voir que l'on peut, pour trouver la limite de la somme dont il s'agit, remplacer, au dénominateur de chaque terme, la direction v_k par la direction n_k de la normale à S en un des sommets, notre somme étant ainsi remplacée par

$$\frac{\sigma_1}{\cos(n_1, z)} + \dots + \frac{\sigma_k}{\cos(n_k, z)} + \dots + \frac{\sigma_m}{\cos(n_m, z)} \quad [5']$$

L'erreur relative ainsi commise sur la somme est en effet inférieure à la plus grande des erreurs relatives sur les différents termes. Or on a

$$|\cos(v_k, z) - \cos(n_k, z)| < |(v_k, z) - (n_k, z)|$$

et le second membre est, dans le trièdre formé par les trois directions v_k, n_k, z , inférieur à (n_k, v_k) , c'est à dire tend vers zéro. Voilà donc une limite supérieure pour l'erreur *absolue* commise en remplaçant le dénominateur [5] par le dénominateur correspondant emprunté à [5']. Quant à l'erreur *relative*, comme ces erreurs portent sur des quantités supérieures à $\frac{1}{\sin \gamma_0}$, elle tend aussi uniformément vers zéro dans les conditions où nous nous plaçons.

Comme $\cos(n, z)$ est une fonction de la position d'un point sur S , c'est à dire de x, y , soit

$$\frac{1}{|\cos(n, z)|} = g(x, y)$$

la limite cherchée est celle d'une somme

$$\sigma_1 g(x_1, y_1) + \sigma_2 g(x_2, y_2) + \dots + \sigma_m g(x_m, y_m) \quad [S]$$

étendue à des aires partielles σ qui tendant vers zéro dans toutes leurs dimensions et dont la somme σ a pour limite s ⁽¹⁾, on voit que cette limite existe, est la même pour toutes les lois d'inscription satisfaisant aux conditions indiquées et est donnée par l'intégrale double $\int \int g(x, y) dx dy$, la fonction $g(x, y)$ n'étant d'ailleurs autre que $\sqrt{p^2 + q^2}$.

11. Il reste une difficulté: celle de s'assurer qu'il existe au moins une manière d'inscrire dans S une surface polyédrale satisfaisant aux conditions $a)$, $b)$, $c)$.

Je dis que ces conditions seront toujours remplies si les facettes polyédrales (toujours assujetties à la condition de tendre vers zéro dans toutes leurs dimensions) se projettent sur le plan des xy suivant des triangles de côtés parallèles aux axes ⁽²⁾.

En premier lieu, s'il en est ainsi, l'angle $\widehat{NMN'}$ de Σ_h qui se projette suivant l'angle droit de σ_h sera toujours compris entre γ_0 et $\pi - \gamma_0$: car l'angle aigu de MN avec la direction de l'axe des z , lequel est au moins égal à γ_0 , mesure l'angle de ce même côté MN avec le plan projettant MN' et, par conséquent, est au plus égal à l'angle aigu compris entre les deux droites MN, MN' . Ainsi, l'on aura toujours $\sin \widehat{NMN'} \geq \sin \gamma_0$.

De même, l'angle TMT' de même projection que le précédent et situé dans le plan tangent à S en M , aura son sinus supérieur à $\sin 2 \gamma_0$.

(1) Les aires par lesquelles σ diffère de s étant d'étendue totale aussi petite qu'on veut et $g(x, y)$ bornée, les termes ajoutés par ces aires à la somme (S) tendraient au total, vers zéro.

(2) Il en est encore de même, généralement, si les σ_k sont des triangles dont le plus grand angle est inférieur à un angle fixe plus petit que π . Les considérations du n° 10 s'appliquent d'elles mêmes à ce nouveau cas et celles du n° 11 s'y étendent aisément.

12. En second lieu, considérons le côté MN de Σ_k situé dans un plan parallèle à celui de xz et la trace MT du même plan projetant sur le plan tangent en M . Le coefficient angulaire de cette dernière droite est p ; le coefficient angulaire p_1 de la première est, d'après la formule des accroissements finis, la valeur de p en un certain point (x_1, y) de même ordonnée que M et d'abscisse comprise entre celles de M et de N . Comme, par hypothèse, p est fonction continue — et, par conséquent, uniformément continue — de x, y , à toute limite supérieure des côtés des triangles rectangles σ_k correspond une limite supérieure η , tendant vers zéro en même temps que la première, de la différence $p_1 - p$ et, par conséquent, de l'angle $\widehat{NMT}$. De même, l'angle analogue situé dans un plan parallèle à celui des yz et compris entre un côté de Σ_k et une droite du plan tangent en M tendra vers zéro en même temps que les dimensions des facettes.

13. Il suffit de combiner les résultats des deux n^{os} précédents pour obtenir celui que nous avons en vue ⁽¹⁾.

Soient, en effet, d'une manière générale, δ, δ' deux directions dont les cosinus directeurs sont λ, μ, ν ; λ', μ', ν' . Le plan qu'elles déterminent a pour cosinus directeurs

$$\frac{\mu\nu' - \nu\mu'}{\sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2}}, \dots, \dots$$

Le dénominateur n'est autre que le sinus de l'angle formé par nos deux directions. Si donc ce sinus est limité inférieurement — ce qui est précisément le cas pour le sinus de l'angle en M du triangle MNT — ces derniers cosinus seront des fonctions continues des premiers et ne seront altérés que de quantités arbitrairement petites si $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ le sont eux mêmes assez peu. Tenant compte du n^o 12, on voit que la condition $b)$ est vérifiée.

(1) On peut préciser par la remarque géométrique suivante. Sur la sphère de rayon 1 et de centre M , soient l'arc de grand cercle tt' , tel que $\sin \widehat{tt'} \geq \sin \gamma_0$, et les deux points n, n' tels que $\widehat{nt} < \epsilon, \widehat{n't'} < \epsilon$; l'angle des deux grands cercles tt', nn' sera inférieur à la somme des angles que ces deux grands cercles font respectivement avec le grand cercle nt' , angles dont les sinus sont plus petits que $\frac{\sin \epsilon}{\sin \gamma_0}$, comme on le voit en appliquant l'analogie des sinus à chacun des triangles sphériques $tnt', tt'n'$ et tenant compte de ce que $\sin \widehat{nt'} \geq \sin \gamma_0$.

La condition $c)$ en est une conséquence, étant donné que, par construction, les faces de chaque dièdre de Σ sont de part et d'autre du plan qui projette l'arête de ce dièdre.

Les restrictions qui concernent la manière dont S est située par rapport au plan des xy se lèvent en remarquant que l'on peut remplacer le plan des xy par l'un quelconque des deux autres plans coordonnés: la normale en un point quelconque de S fait avec l'un au moins des axes un angle inférieur à $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$, et il suffit de diviser S , suivant que l'axe coordonné dont la direction est la plus rapprochée de celle de la normale est Ox , Oy ou Oz , en régions auxquelles on appliquera séparément la méthode précédente.

13 bis. Ici encore, il reste à prouver que cette subdivision peut se faire de manière que chacune des régions partielles se projette sur un plan coordonné suivant une aire quarrable.

Il en est certainement ainsi si la surface est représentée paramétriquement par des formules

$$x = \varphi(t, u) \quad , \quad y = \psi(t, u) \quad , \quad z = \chi(t, u)$$

les fonctions φ, ψ, χ admettant des dérivées premières continues, les trois déterminants fonctionnels

$$L_1 = \frac{D(y, z)}{D(t, u)} \quad , \quad L_2 = \frac{D(z, x)}{D(t, u)} \quad , \quad L_3 = \frac{D(x, y)}{D(t, u)}$$

ne s'annulant jamais ensemble et le point figuratif (t, u) décrivant, dans son plan, une aire quarrable ω . Supposons en effet pour commencer, le déterminant fonctionnel L_3 partout différent de zéro. Alors la projection de S sur le plan des xy sera elle-même une aire quarrable ou, tout au moins ⁽¹⁾, une somme d'aires quarrables d'après les raisonnements des numéros 6 bis et 7.

Le cas où ce n'est pas toujours la même quantité L_i qui est différente de zéro se ramène au précédent. En effet, en vertu de la continuité — donc de la continuité uniforme — de ces L_i , la plus grande d'entre elles est partout supérieure en valeur absolue à un

(1) On sait que la correspondance entre x, y d'une part; t, u de l'autre n'est pas nécessairement biunivoque (de sorte que la projection de S sur le plan des xy pourrait se recouvrir partiellement); mais elle l'est dans tout carré de côté h , si h est suffisamment petit.

nombre fixe k et, d'autre part, on peut assigner le côté h d'un carré à côtés parallèles aux axes du plan des tu de manière que l'oscillation d'un quelconque des L à l'intérieur de n'importe quel carré ainsi tracé soit inférieure à $k/2$. L'aire ω pouvant être recouverte par un ensemble de carrés de côté h , la conclusion est démontrée.

Les conditions où nous venons de nous placer ne sont pas, il est vrai, celles à l'examen desquelles nous pouvons nous borner. Pour atteindre les formes les plus usuelles d'une surface S quelconque et, particulièrement, le cas où S est fermé, on sait qu'il est nécessaire de considérer sur la surface plusieurs régions rapportées, en général, à des coordonnées curvilignes différentes, se recouvrant d'ailleurs mutuellement de manière que chaque point de S soit intérieur (au sens strict) à l'une au moins d'entre elles et dans chacune des conditions postulées il y a un instant. Sans entrer dans l'examen détaillé de ce dernier cas, disons simplement qu'il s'élucide en remarquant: 1° que d'après ces hypothèses, si deux régions voisines sont rapportées, l'une aux coordonnées curvilignes t, u , l'autre aux

coordonnées curvilignes v, w , le déterminant fonctionnel $\frac{D(v, w)}{D(t, u)}$ est, dans toute la partie commune aux deux régions, différent de zéro; 2° que, en conséquence, à toute aire quarrable du plan des tu empruntée à cette partie commune correspond une aire quarrable du plan des vw .

III

14.. En terminant, je voudrais dire un mot de la définition purement analytique des fonctions circulaires. C'est une question qui a préoccupé plusieurs auteurs (en dernier lieu, par exemple, M. Landau, dans son *Traité de Calcul différentiel et intégral*).

Mon but est de la présenter sous un aspect particulier, en montrant comment elle s'introduit naturellement à propos de la théorie des quadratures élémentaires. La constatation que « l'on ne sait pas intégrer » un certain nombre de différentielles simples (telles que les différentielles elliptiques ou hyperelliptiques) apparaît tout d'abord à l'étudiant comme une faiblesse du Calcul Intégral. Il y a là une idée dont la fausseté apparaît si l'on essaie de s'imaginer ce qui aurait pu être ce Calcul en le supposant inventé par des mathématiciens sans contact avec le monde géométrique et, d'autre part, n'ayant pas encore songé aux logarithmes. Ces mathématiciens auraient pro-

cédé comme nous le faisons aujourd'hui pour intégrer les différentielles de fonctions rationnelles; mais ils auraient seulement pu opérer leur réduction à deux d'entre elles, savoir

$$\frac{dx}{x} \quad [6]$$

et

$$\frac{dx}{1+x^2} \quad [7]$$

qu'il aurait fallu considérer comme « non intégrables élémentairement ».

Or bien, loin de les arrêter, cette circonstance n'aurait pas manqué de les conduire à l'étude de deux fonctions « nouvelles »: tout d'abord, de la fonction, définie pour toute valeur positive de x ,

$$y = Lx = \int_1^x \frac{dx}{x} \quad [6']$$

On sait qu'on parvient aisément ⁽¹⁾ à démontrer, relativement à cette fonction Lx la propriété fondamentale $Lx + Lx' = L(xx')$.

En un mot, constater que « l'on ne sait pas intégrer » la différentielle [6], e'aurait été inventer les logarithmes.

On aurait, du même coup, inventé la fonction exponentielle, puisque la quantité [6'], égale à $-\infty$ pour $x=0$ et à $+\infty$ pour $x=+\infty$, est constamment croissante; une telle fonction $x=e^y$, définie pour toute valeur de y , par l'égalité $y=Lx$, (et d'ailleurs toujours positive), satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = x \quad [8]$$

et à la condition $e^0 = x(0) = 1$. Comme on voit immédiatement que deux solutions (non identiquement nulles) de [8] sont dans un rapport constant, on voit qu'il n'existe qu'une fonction $x(y)$ satisfaisant aux conditions précédentes, celle dont on obtient le développement en série entière.

15. On aurait ensuite à considérer l'intégrale indéfinie

$$x = \int_0^t \frac{dt}{1+t^2} \quad [7']$$

(1) Voir, p. ex., notre *Cours d'analyse*, I, p. 32, Ex. 1^{er} et p. 514.

qui a une valeur déterminée pour toute valeur réelle de t et qui reste finie pour t augmentant indéfiniment. Désignant provisoirement par I sa valeur pour $t = +\infty$ (et, par conséquent, par $-I$ sa valeur pour $t = -\infty$, puisque la quantité à intégrer est paire), on voit que, d'une manière analogue à ce qui vient d'être indiqué pour la fonction exponentielle, on définit ainsi, pour toute valeur de x comprise entre $-I$ et $+I$, une fonction inverse

$$t = \operatorname{tg} x$$

telle que l'égalité ainsi écrite soit équivalente à [7'].

D'autre part, l'étude des différentielles portant sur la racine carrée d'un polynôme du second degré aurait conduit, tout d'abord, à réduire le problème à l'intégration de

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad [9]$$

Pour $a > 0$, cette intégration s'opère par des logarithmes; mais il n'en est plus de même pour $a < 0$: autrement dit, pour l'intégrale (à laquelle on peut alors toujours ramener celle de la différentielle [9] par un changement linéaire de variable)

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad [10]$$

Cette dernière intégrale, dans laquelle, jusqu'à nouvel ordre, nous prenons le radical positif, aurait pu être ramenée, par des méthodes bien connues, aux intégrales de fonctions rationnelles - en fait, à [7'] -; mais on en obtient les propriétés d'une manière au moins aussi simple en l'étudiant directement.

Elle donne une valeur de x pour toute valeur de u comprise entre -1 et $+1$, et même pour $u = \pm 1$. Désignons par π l'intégrale [10] prise entre -1 et $+1$, de sorte que, pour $u = 1$, x est égal à $\frac{\pi}{2}$.

Entre les valeurs $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ de la variable x , il existe une fonction inverse

$$u = \sin x \quad [11]$$

définie par l'égalité [10]. Celle-ci vérifie l'équation différentielle du premier ordre

$$u^2 + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 = 1 \quad [12]$$

et, par conséquent tant que $\frac{du}{dx} \neq 0$, donc tant que $u \neq 1$, l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u = 0 \quad [13]$$

(équivalente à la première toutes les fois que $\frac{du}{dx} \neq 0$). L'équation [13] admet une solution définie, pour toute valeur de x , par la série entière

$$U = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad [14]$$

qui s'annule pour $x = 0$, pendant que sa dérivée

$$\frac{dU}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad [15]$$

prend la valeur 1. Cette solution ne peut être que $\sin x$, pour x compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, puisque $U^2 + \left(\frac{dU}{dx}\right)^2$ a une valeur constante, laquelle ne peut être que l'unité, ce qui, U étant nul avec x et sa dérivée étant initialement égale à 1, entraîne nécessairement que x doit coïncider avec l'expression [10], où u est remplacé par U , il en est ainsi, tant que la limite supérieure d'intégration n'est pas devenue égale à ± 1 , c'est à dire dans tout l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Lorsque x dépasse la valeur $\frac{\pi}{2}$, la fonction u définie par la série [12] ne cesse pas d'exister, d'admettre des dérivées continues, et de vérifier l'équation du second ordre [13].

L'équation du premier ordre [12], qui en est la conséquence, laisserait le choix entre u identiquement égale à 1 à partir de $x = \frac{\pi}{2}$

(solution singulière) et $\frac{du}{dx} = -\sqrt{1-u^2}$; mais la solution singulière est exclue par l'équation [13], puisque la fonction continue $\frac{d^2u}{dx^2}$ est égale à 1 pour $x = \frac{\pi}{2}$. Nous n'avons pas à répéter la discussion bien connue qui s'ensuit et d'où résulte la définition de $u = \sin x$, de sa dérivée $\frac{du}{dx} = \cos x = v$ et l'égalité $u^2 + v^2 = 1$ pour toute valeur réelle de x , ainsi que la périodicité des deux fonctions ainsi formées.

L'équation différentielle linéaire et homogène [13] est aussi vérifiée par la fonction $v = \cos x$, la dérivée de celle-ci étant $-u$. Elle se transforme, d'autre part, en une équation du premier ordre en introduisant la dérivée logarithmique $\frac{1}{u} \frac{du}{dx}$ ou, la dérivée logarithmique analogue $-t = \frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$, ici égale à $-\frac{u}{v}$ et qui vérifiera l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx} - (1 + t^2) = 0$$

Comme cette quantité s'annule avec x , on voit que x est égal à l'intégrale [7'] et que, par conséquent, le quotient $\frac{u}{v}$ est égal à la quantité précédemment définie $t = tg x$. (En particulier, la quantité désignée tout à l'heure par I n'est autre que $\frac{\pi}{2}$).

Enfin, quelles que soient les constantes A, B , l'expression $w = A \cos x + B \sin x$ est aussi une solution de [13], de sorte que, en la substituant à u dans le premier membre de [12], on obtient une constante m^2 (où m n'est défini qu'au signe près) : en la substituant dans l'intégrale indéfinie [10] multipliée par $\pm m$, le résultat ne peut différer de x que par une constante, et on a (en choisissant convenablement le signe de m)

$$w = m \sin (x + h) \quad (h \text{ constant}).$$

Les conditions qui déterminent m et h , connaissant A et B , s'obtiennent en faisant $x = 0$ dans w et dans $\frac{dw}{dx}$, ce qui donne

$$A = m \sin h, \quad B = m \cos h \quad [14]$$

et la solution de ce système en m et h est unique si l'on impose la condition que h soit compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, sa valeur étant dès lors donnée par l'intégrale [7'] avec $t = A/B$. Il en résulte que, inversement, m étant pris égal à 1 et h arbitrairement entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'expression w , avec les valeurs [14] de A, B , donne $\sin(x + h)$. C'est le théorème d'addition (sous réserve de l'étendre, par périodicité, au cas de h non compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$).

Paris, Mai 1937.

ALGUNAS FORMULAS FUNDAMENTALES DE LAS FUNCIONES POLIGENAS DE UNA Y VARIAS VARIABLES

POR J. C. VIGNAUX

En la teoría de las funciones polígenas de una variable compleja $z = x + iy$; es decir funciones de la forma

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y),$$

donde u y v son funciones continuas con derivadas parciales primeras continuas, *no ligadas* por las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}; \quad [1]$$

existen dos teoremas fundamentales debidos a M. Pompeiu; que generalizan ampliamente los clásicos teoremas de Cauchy de las funciones holomorfas.

El primero se traduce en la relación funcional

$$\int_C f(z) dz - 2i \iint_A Df(v) d\omega = 0$$

donde

$$Df(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

es la *derivada areolar* de $f(z)$, C un contorno cerrado que limita un dominio (A) .

Si la función es holomorfa en A , se tiene: $Df(z) \equiv 0$, y por tanto, resulta el teorema de Cauchy

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

La fórmula fundamental de M. Pompeiu es

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - \xi} - \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{Df(v)}{v - \xi} dw$$

la cual nos da, el valor de una función polígena en un punto cualquiera ξ interior al dominio A , cuando se conoce los valores de $f(z)$ sobre el contorno C y los valores de la derivada areolar $Df(z)$ en el interior de A .

Si la función $f(z)$ es holomorfa en A , resulta como caso particular la fórmula de Cauchy

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - \xi}. \quad [2]$$

Por otra parte, M. Calugareano ⁽¹⁾ y Kasner han introducido el operador lineal

$$\overline{D}f(z) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial x} - i \frac{\partial w}{\partial y} \right]$$

que denominan « *derivada media* ».

La condición

$$\overline{D}f(z) = 0$$

es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad [2]$$

define una categoría de funciones que se llaman *antimonógenas* (Calugareano) y que están íntimamente ligadas a las funciones *monógenas*. En efecto, las condiciones [2] resultan de las condiciones de monogeneidad [1] con la sustitución de $-y$ a y ; por tanto, cada función monógena

$$P(x, y) + i Q(x, y),$$

origina una función antimonógena

$$P(x, -y) + i Q(x, -y).$$

(¹) G. CALUGAREANO, (Thesis, Paris 1928).

Además M. Calugareano da la relación

$$\int_c f(z) d\bar{z} - 2i \iint_A \bar{D}f(v) d\omega = 0 \quad [\gamma]$$

donde $\bar{z} = x - iy$ es la conjugada de $z = x + iy$.

En esta Nota me propongo extender a las funciones polígenas de varias variables los teoremas de Pompeiu y de Calugareano.

I. — FUNCIONES DE UNA VARIABLE

2. INTEGRAL CONJUGADA. — De la fórmula $[\gamma]$, se deduce, si la función $f(z)$ es antimonógena en el dominio A

$$\int_c f(z) d\bar{z} = 0 ;$$

es decir: *la integral conjugada de una función antimonógena en el interior de un dominio limitado por una curva cerrada C , es nula.*

Subsiste también el teorema recíproco análogo al teorema de Morera: *Sea una función $f(z)$ polígena en una región A ; si la integral conjugada*

$$\int_c f(z) d\bar{z}$$

tomada sobre una curva cerrada C cualquiera situada en A es nula, $f(z)$ es una función antimonógena en A .

La demostración de este teorema se deduce fácilmente de la fórmula de Calugareano $[\gamma]$; teniendo presente que de la condición

$$\int_c f(z) d\bar{z} - 2i \iint_A \bar{D}f(v) d\omega = 0$$

resultan las condiciones de antimonogeneidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

3. — Consideremos un dominio A limitado por el contorno cerrado C y $f(z)$ una función polígena en A . Sea ξ un punto cualquiera

interior a A y con centro en este punto tracemos un círculo δ , todo el interior a A . La función

$$\frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}},$$

es continua para todo z de la región interior a C y exterior a δ ⁽¹⁾, por tanto, la fórmula de Calugareano $[\gamma]$ es aplicable; y teniendo presente que por ser $\frac{1}{\bar{z} - \bar{\xi}}$ función antimonógena en dicho dominio, hace las veces de constante a los efectos de la derivación media, es decir

$$\bar{D} \left[\frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} \right] = \frac{1}{\bar{z} - \bar{\xi}} \bar{D} f(z);$$

se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c+\delta} \frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\bar{z} - \frac{1}{\pi} \iint_{A-\sigma} \frac{\bar{D} f(v)}{\bar{v} - \bar{\xi}} d\omega = 0 \quad [2]$$

donde σ representa el área del círculo δ .

Por otra parte, la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\delta} \frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\bar{z},$$

diffiere del valor $f(\bar{\xi})$, tan poco como se quiera. Si M es un número positivo fijo, tal que:

$$|\bar{D} f(z)| < M,$$

y ponemos

$$\bar{v} - \bar{\xi} = \rho e^{i\varphi},$$

resulta

$$\left| \iint_{\delta} \frac{\bar{D} f(z)}{\bar{v} - \bar{\xi}} d\omega \right| \leq \iint_{\delta} \frac{|\bar{D} f(z)|}{|\bar{v} - \bar{\xi}|} d\omega < M \iint_{\delta} d\rho d\varphi < 2\pi R M$$

⁽¹⁾ En este caso, la variable $\bar{z}$ pertenece a la región simétrica respecto del eje real de dicha región.

Según esto, la igualdad [2] nos da

$$\left| f(\bar{\xi}) - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\bar{z} + \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{\bar{D}f(v)}{\bar{v} - \bar{\xi}} d\omega \right| < 2\pi R M + \varepsilon$$

es decir

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\bar{z} - \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{\bar{D}f(v)}{\bar{v} - \bar{\xi}} d\omega \quad [3]$$

que es la fórmula buscada. Ello nos prueba que el valor de una función polígena en un punto conjugado de un punto interior de un dominio cerrado A , está determinado por los valores que $f(z)$ toma en el contorno C y por los valores de la derivada media en el interior A mediante una integral conjugada.

Como caso particular resulta la fórmula

$$f(\bar{\xi}) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\bar{z},$$

cuando la $f(z)$ es antimonógena en A , puesto que es entonces: $\bar{D}f(z) \equiv 0$. Ella nos da el valor de la función antimonógena $f(z)$ en un punto ξ interior al contorno simétrico respecto del eje real conociendo los valores de la misma función a lo largo del contorno C mediante una integral conjugada.

II. — FUNCIONES DE DOS VARIABLES

Sean

$$z = x + i y, \quad z' = x' + i y',$$

dos variables complejas independientes, las cuales representaremos por los puntos $M(x, y)$, $M'(x', y')$ en dos planos coordenados. Consideremos dos regiones simples A y A' situadas respectivamente en dichos planos y sea: $w = f(z, z')$ una función polígena de las variables z, z' en el dominio (A, A') ⁽¹⁾.

(1) J. C. VIGNAUX, *Anales de la S. C. Argentina*, Julio de 1935, EI, T. CXX.

Sea además, $\widehat{ab}$ un arco de curva situado en A y $\widehat{a'b'}$ un arco de curva de A' ; y dividámoslos en arcos parciales, mediante los puntos ordenados

$$z_0, z_1 \dots z_i \dots, z_{n-1}, z_n; z'_0, z'_1 \dots z'_j \dots z'_{m-1}, z'_m$$

y consideremos la sumatoria doble

$$S_{m,n} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(\alpha_i, \beta_j) (z_i - z_{i-1}) (z'_j - z'_{j-1})$$

Cuando m y n aumenta indefinidamente de modo que todos los

$$|z_i - z_{i-1}| \rightarrow 0, \quad |z'_j - z'_{j-1}| \rightarrow 0,$$

$S_{m,n}$ tiende hacia un límite determinado S que se indica con la notación

$$S = \int_{\widehat{ab}} \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z') dz dz'$$

y se llama la integral doble sobre los arcos $\widehat{ab}$ y $\widehat{a'b'}$.

Si

$$f(z, z') = P(x, y, x', y') + i Q(x, y, x', y')$$

donde P y Q son funciones continuas de las variables reales x, x', y, y' ; se tiene entonces ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P dx' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P dy' - \\ &\quad - \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q dy' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q dx' \\ &\quad + i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q dx' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q dy' \\ &\quad + i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P dy' + i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P dx', \end{aligned}$$

(1) Véase: GOURSAT, *Cours d'Analyse*, T. II, p. 267.

Aplicando esta fórmula a dos curvas c y c' , siendo c' cerrada, se tiene:

$$\begin{aligned} \int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' &= \int_c dx \int_{c'} P dx' - Q dy' + i \int_c dx \int_{c'} Q dx' + P dy' + \\ &\quad - \int_c dy \int_{c'} Q dx' + P dy' + i \int_c dy \int_{c'} P dx' - Q dy' \end{aligned}$$

Teniendo presente las fórmulas de Green

$$\begin{aligned} \int_{c'} P dx' - Q dy' &= - \iint_{A'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) dx' dy' \\ \int_{c'} Q dx' + P dy' &= \iint_{A'} \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) dx' dy' , \end{aligned}$$

la relación anterior, resulta

$$\begin{aligned} \int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' &= \int_c dx \iint_{A'} \left[\left(- \frac{\partial Q}{\partial x'} - \frac{\partial P}{\partial y'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + i \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) \right] dx' dy' - \\ &\quad - \int_c dy \iint_{A'} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right) + i \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) \right] dx' dy' \end{aligned}$$

Además; puesto que

$$2i D_{z'} f(z, z') = - \left(\frac{\partial Q}{\partial x'} + \frac{\partial P}{\partial y'} \right) + i \left(\frac{\partial P}{\partial x'} - \frac{\partial Q}{\partial y'} \right)$$

se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' &= 2i \int_c dx \iint_{A'} D_{z'} f(v, v') d\omega' - 2 \int_c dy \iint_{A'} f(v, v') d\omega' \\ &= 2 \int_c (i dx - dy) \iint_{A'} D_{z'} f(v, v') d\omega' \end{aligned}$$

es decir

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' - 2i \int_c dz \iint_{A'} D_{z'} f(v, v') d\omega' = 0 , \quad [\alpha]$$

Esta fórmula constituye la extensión de la fórmula de Pompeiu, a las funciones de dos variables complejas.

Del mismo modo resulta, si la curva c es cerrada y limita el dominio A

$$\int_{c'} \int_c f(z, z') dz dz' + 2i \int_{c'} dz' \iint_A Df(v, v') d\omega = 0 \quad [\beta]$$

Si la función es holomorfa, se tiene

$$D_z f(z, z') \equiv 0, \quad D_{z'} f(z, z') \equiv 0,$$

por tanto, las fórmulas $[\alpha]$ o $[\beta]$ nos da

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' = 0$$

que constituye el teorema de H. Poincaré para estas funciones.

Para las integrales dobles conjugadas se obtienen fórmulas análogas en las cuales figuran las derivadas simétricas parciales.

4. INTEGRAL DOBLE CONJUGADA. — Consideremos ahora la sumatoria

$$\bar{S}_{m,n} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_i) (\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1}) (\bar{z}'_j - \bar{z}'_{j-1})$$

donde

$$\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{z} = x - iy \\ \bar{z}' = x' - iy' \end{cases}$$

el límite de $\bar{S}_{m,n}$ es un número que indicaremos con la notación

$$\bar{S} = \int_{\widehat{ab}} \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z') d\bar{z} d\bar{z}'$$

y llamaremos la *integral doble conjugada de la función* $f(z, z')$.

Razonando en la misma forma que en el caso anterior, es fácil establecer la relación siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P dx' - \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P dy' \\ &+ \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q dy' + \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q dx' \\ &+ i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} Q dx' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} Q dy' \\ &+ i \int_{\widehat{ab}} dx \int_{\widehat{a'b'}} P dy' - i \int_{\widehat{ab}} dy \int_{\widehat{a'b'}} P dx' \end{aligned}$$

Esta relación se puede escribir también en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{ab}} \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z') dz dz' &= \int_{\widehat{ab}} (dx + i dy) \int_{\widehat{a'b'}} (P + i Q) (dx' + i dy') = \\ &= \int_{\widehat{ab}} dz \int_{\widehat{a'b'}} f(z, z') dz', \end{aligned}$$

y cuyo significado es inmediato.

Si aplicamos a un contorno cerrado c' , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_c \int_{c'} f(z, z') d\bar{z} d\bar{z}' &= \int_c dx \int_{c'} [(P dx' + Q dy') + i (Q dx' - P dy')] dx' dy' \\ &+ \int_c dy \int_{c'} [(-P dy' + Q dx') - i (P dx' + Q dy')] dx' dy' \end{aligned}$$

de donde, teniendo presente las fórmulas de Green, resulta

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' = 2 \int (i dx + dy) \iint_{A'} \bar{D}_z f(v, v') d\omega'$$

es decir

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' - 2i \int_c dz \iint_{A'} \bar{D}_z f(v, v') d\omega' = 0 \quad [\alpha']$$

donde $\bar{D}_z$ es la derivada simétrica parcial respecto a z' .

Igualmente se tiene, si c es cerrado

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') dz dz' + 2i \int_{c'} dz' \iint_A \bar{D}_z f(v, v') d\omega' = 0. \quad [\beta']$$

Si la función es antimonógena, resulta

$$\bar{D}_z f(z, z') = 0 \quad \text{y} \quad \bar{D}_{z'} f(z, z') = 0$$

por tanto la $[\alpha']$ o $[\beta']$, nos dan

$$\int_c \int_{c'} f(z, z') d\bar{z} d\bar{z}' = 0.$$

En otro lugar ⁽¹⁾ he dado para las funciones polígenas de dos variables, la extensión de la fórmula de Pompeiu:

$$\begin{aligned} f(\xi, \xi') &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z') dz'}{(z - \xi)(z' - \xi')} - \\ &- \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{D_z f(v, v')}{v - \xi} d\omega - \frac{1}{\pi} \iint_{A'} \frac{D_{z'} f(v, v')}{v' - \xi'} d\omega' - \\ &- \frac{1}{(\pi i)^2} \iint_A \frac{d\omega}{v - \xi} \iint_{A'} \frac{D^2_{z, z'} f(v, v')}{v' - \xi'} dw' \end{aligned} \quad [1]$$

donde $D_z f$ y $D_{z'} f$, representan las derivadas areolares parciales de $f(z, z')$.

Cuando la $f(z, z')$ es holomorfa en el dominio $[A, A']$, se tiene, como caso particular, la fórmula de Hartogs

$$f(\xi, \xi') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_c dz \int_{c'} \frac{f(z, z')}{(z - \xi)(z' - \xi')} dz'.$$

Esta fórmula se puede también deducir, considerando la función polígena

$$\frac{f(z, z')}{(z - \xi)(z' - \xi')} \quad [2]$$

en la región asociada $[A - \sigma, A' - \sigma']$ donde σ y σ' representan las áreas de dos círculos de centro en ξ y ξ' respectivamente y completamente interiores de las regiones A y A' . Aplicando a la [2] la fórmula [2], nº (1) y razonando como en el caso del nº 2, se obtiene la [1].

Del mismo modo, partiendo de la función

$$\frac{f(z, z')}{(\bar{z} - \bar{\xi})(\bar{z}' - \bar{\xi}')}.$$

y aplicando la fórmula [β] del nº 3, se deduce la fórmula

$$\begin{aligned} f(\bar{\xi}, \bar{\xi}') &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_c d\bar{z} \int_{c'} \frac{f(z, z') d\bar{z}'}{(\bar{z} - \bar{\xi})(\bar{z}' - \bar{\xi}')} - \\ &- \frac{1}{\pi} \iint_A \frac{D_z f(v, v')}{v - \xi} du - \frac{1}{\pi} \iint_{A'} \frac{D_{z'} f(v, v')}{v' - \xi'} dw' - \\ &- \frac{1}{(\pi i)^2} \iint_A \frac{dw}{v - \xi} \iint_{A'} \frac{D^2_{z, z'} f(v, v')}{v' - \xi'} dw' \end{aligned}$$

(1) Loc. cit.

Observación. — Las pruebas de esta Nota estaban ya corregidas, cuando recibí, gracias a la gentileza de su autor, el doctor E. Martinelli, una importante memoria (*Sulle funzioni poligene di due variabili complesse*, Reale Accademia d' Italia, *Estratto* n° 3, 1937. Roma), y por la cual me informo, que el ilustre matemático italiano Prof. A. Tonolo, ha publicado simultáneamente con mi memoria de la Sociedad Científica antes citada, una Nota « *Sulle funzione complesse di più variabili olomorfe di ordine n* » (*Rendiconti del Seminario Matematico*, Padova, n° 1-3 (1935), en la cual da una fórmula análoga a la [1] n° 4, y extiende a las funciones de varias variables, los resultados de las funciones analíticas de orden n de P. Burgatti (*Sulle funzioni analitiche di ordine n* , « *Buletino dell' Unione matem. italiana* », 1922, f. 1).

Entre los resultados importantes obtenidos por Martinelli, se destacan sin duda las dos fórmulas que propone como extensión de las fórmulas de Cauchy y de Pompeiu.

UNA PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA CURVA DE VIVIANI Y OTRAS CUESTIONES CONEXAS

POR ANTONIO VALEIRAS

1.—Llamando: (X, Y, Z) a las coordenadas generales de un punto del espacio; (ξ, η, ζ) a las coordenadas de un punto de la esfera de radio 1 con centro en 0, y (x, y) a las coordenadas de un punto del plano: $Z=0$, si adoptamos como centro de proyección el punto $A \equiv (0/0/1)$ y como cuadro el plano de las (x, y) , entonces: Entre las coordenadas de un punto de la esfera y su correspondiente proyección estereográfica, se verifican las siguientes relaciones:

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta} \quad , \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$$

y sus inversas:

$$\xi = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \quad , \quad \eta = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad , \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

las cuales definen completamente a la transformación considerada.

Además, si una curva esférica se obtiene al cortar a dicha superficie con la superficie que tiene como ecuación: $F(X, Y, Z) = 0$, luego su proyección estereográfica será una curva que tendrá como ecuación:

$$F\left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}\right) = 0 \quad .$$

2.— Esto establecido, sabemos que la curva de Viviani se obtiene cortando una esfera con un cilindro circular recto de radio igual a la mitad del radio de la esfera, y dispuesto de tal manera que una de sus generatrices coincida con un diámetro de la misma.

Para la esfera anteriormente considerada podremos tomar p. ej. el cilindro que tiene como ecuación:

$$Y^2 + Z^2 - Z = 0,$$

en cuyo caso el nodo de la curva viene a coincidir con el centro de la proyección estereográfica.

La ecuación de la curva imagen será, según lo dicho anteriormente, la siguiente:

$$\frac{4y^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} + \frac{(x^2 + y^2 - 1)^2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} = 0$$

y después de reducciones sencillas, se obtiene:

$$x^2 - y^2 = 1$$

lo que nos permite afirmar esta proposición que consideramos fundamental en la teoría de la curva, a saber: *La proyección estereográfica de la curva de Viviani, efectuada tomando como centro de proyección el nodo de la misma, es una hipérbola equilátera, cuyos vértices coinciden con los de la curva dada.*

3.—La importancia de este teorema es evidente. Conservándose en la transformación las circunferencias y los ángulos, de toda propiedad de la hipérbola, que pueda enunciarse en tales términos, se deduce a través de la proyección estereográfica una propiedad correlativa de la curva esférica.

Tomemos el ejemplo más inmediato y veamos en qué se convierte la conocida propiedad de la tangente a la hipérbola, de ser bisectriz del ángulo formado por los radios vectores del punto de contacto.

A los focos de la hipérbola: $F_1 \equiv (-\sqrt{2}/0)$, $F_2 \equiv (\sqrt{2}/0)$, corresponden los focos de la curva de Viviani: $F' \equiv \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \mid 0 \mid \frac{1}{3}\right)$

$F'' \equiv \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \mid 0 \mid \frac{1}{3}\right)$, y si P es un punto de la curva esférica y

M su correspondiente proyección sobre la hipérbola, a las rectas: F_1M , F_2M , corresponden las circunferencias: $F'PA$, $F''PA$, y la bisectriz del ángulo formado por las tangentes a éstas últimas en el punto P será la tangente a la curva de Viviani en dicho punto.

4. — Si descomponemos la ecuación de la hipérbola, haciendo:

$$x + y = t \quad , \quad x - y = \frac{1}{t}$$

se obtienen:

$$x = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right) \quad , \quad y = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

que constituyen —al variar t — las ecuaciones paramétricas de la curva.

Substituyendo en las fórmulas de la proyección estereográfica, después de reducciones sencillas resultan:

$$\xi = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad , \quad \eta = \frac{2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \quad , \quad \zeta = \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$$

o bien, puesto que con estas fórmulas se verifica idénticamente la condición: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$, y por lo tanto no es indispensable fijarlo mediante la notación:

$$X = \frac{2t}{t^2 + 1} \quad , \quad Y = \frac{2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} \quad , \quad Z = \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la curva de Viviani.

La determinación del valor parámetro: t , y de su recíproco: $\frac{1}{t}$, que corresponden a un punto dado: P , de la curva, puede efectuarse gráficamente de la siguiente manera:

Dado el punto: P , se obtiene su proyección estereográfica: M , que será un punto de la hipérbola imagen.

Ahora, si por M se trazan las paralelas respectivamente a la segunda y a la primera bisectriz de los ejes (x, y) , éstas cortarán al eje x en puntos cuyas abscisas son precisamente: t y $\frac{1}{t}$, como se deduce de las ecuaciones en que ha sido descompuesta la ecuación de la hipérbola.

5. — Las ecuaciones obtenidas resultan particularmente ventajosas en las aplicaciones a causa de la sencilla significación del parámetro.

Así, para obtener las intersecciones de la curva con un plano arbitrario:

$$aX + bY + cZ + d = 0,$$

debemos resolver la ecuación resultante:

$$a \cdot \frac{2t}{t^2 + 1} + b \cdot \frac{2t(t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^2} + c \cdot \frac{(t^2 - 1)^2}{(t^2 + 1)^2} + d = 0,$$

es decir:

$$2a(t^3 + t) + 2b(t^3 - t) + c(t^4 - 2t^2 + 1) + d(t^4 + 2t^2 + 1) = 0$$

o sea:

$$(c + d)t^4 + 2(a + b)t^3 + 2(d - c)t^2 + 2(a - b)t + (c + d) = 0.$$

Las cuatro raíces: t_1, t_2, t_3, t_4 , de esta ecuación substituídas en las ecuaciones paramétricas nos dan las coordenadas de los cuatro puntos de intersección buscados.

Ahora bien: si sobre la curva tomamos tres puntos, correspondientes p. ej. a los valores: t_1, t_2, t_3 , del parámetro, queda por ellos determinado un plano, el cual corta ulteriormente a la curva en un cuarto punto correspondiente a un cierto valor: t_4 , del parámetro, y así necesariamente entre los parámetros de cuatro puntos coplanares debe verificarse una relación, la cual permitirá deducir uno de ellos cuando se conozcan los otros tres.

Esta relación asume una forma sencillísima en nuestro caso. Puesto que en la ecuación resultante el primero y el último coeficiente son iguales (ya que ambos valen: $c + d$) el producto de las cuatro raíces de dicha ecuación valdrá: 1, o sea:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1,$$

de modo que: *La condición para que cuatro puntos sean coplanares consiste en que el producto de los cuatro parámetros correspondientes valga 1.*

De allí resulta:

$$t_4 = \frac{1}{t_1 t_2 t_3}$$

lo que nos da explícitamente: t_4 cuando se conocen: t_1, t_2, t_3 .

6. — Se podría decir también que la condición anterior es igualmente la condición para que cuatro puntos estén sobre una circunferencia, y *al transformar estereográficamente la propiedad, resulta que ésta es también la condición para que cuatro puntos de la hipérbola imagen se encuentren igualmente sobre una circunferencia.*

En esta última forma se restablece para la hipérbola una proposición análoga a dos teoremas conocidos de Joachimstal relativos a la elipse y a la parábola, a saber:

I) La condición para que cuatro puntos de una elipse se encuentren sobre una circunferencia consiste en que la suma de sus anomalías excéntricas sea nula.

II) La condición para que cuatro puntos de una parábola se encuentren sobre una circunferencia consiste en que el centro de las medias distancias de los mismos se encuentre sobre el eje de la curva.

Pero no hemos visto, hasta donde alcanzan nuestras informaciones, el teorema correlativo para la hipérbola, y *como nuestra demostración parece aplicarse solamente al caso particular de la hipérbola equilátera, nos proponemos ahora obtenerla en el caso general.*

Con las notaciones usuales, sabemos que la ecuación de la hipérbola referida a sus asíntotas es: $xy = \frac{c^2}{4}$, de la cual se deducen inmediatamente como ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{ct}{2} \quad , \quad y = \frac{c}{2t} .$$

Ahora, respecto del sistema de ejes oblicuos formado por las asíntotas, la ecuación general de una circunferencia es:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega + 2Ax + 2By + C = 0 ,$$

y para determinar las intersecciones de la misma con la hipérbola anterior es necesario resolver la ecuación resultante:

$$\frac{c^2 t^2}{4} + \frac{c^2}{4t^2} + \frac{c^2 \cos \omega}{2} + Act + \frac{Bc}{t} + C = 0$$

o sea:

$$c^2 t^4 + c^2 + 2c^2 \cos \omega \cdot t^2 + 4Act^3 + 4Bct + 4Ct^2 = 0$$

es decir:

$$c^2 t^4 + 4Act^3 + 2(c^2 \cos \omega + 2C)t^2 + 4Bct + c^2 = 0 .$$

Lo mismo que en la cuestión anterior, por ser iguales los coeficientes extremos, resulta:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$$

lo cual justifica la proposición en el caso general.

7.—El teorema anterior permite construir en una forma muy sencilla el círculo osculador en un punto genérico de la hipérbola.

Si éste es M' , correspondiente al valor: t' del parámetro, en él se encuentran reunidas tres intersecciones, p. ej.: $t_1 = t_2 = t_3 = t'$, y existe una intersección ulterior: M'' correspondiente al valor: t_4 del parámetro, el cual designaremos por t'' para unificar la notación.

Pero, puesto que $t_1 t_2 t_3 t_4 = 1$, resulta:

$$t'' = \frac{1}{t'^3}$$

Obtenido de esta manera el punto: M'' , el círculo osculador está perfectamente determinado sabiendo que pasa por M' y M'' y que además es tangente en el primero a la tangente correspondiente de la hipérbola.

Y si excepcionalmente ocurriera que coinciden M' y M'' , esto revelaría que nos encontramos en un vértice de la cónica y apelaríamos a las construcciones elementales correspondiente a dicho caso ⁽¹⁾.

Basta luego una proyección estereográfica para deducir el círculo osculador, y por lo tanto el plano osculador en el punto correspondiente de la curva de Viviani.

8.—En este mismo terreno, como corolario del teorema anterior, se obtiene también la siguiente proposición:

Los cuatro planos osculadores en cuatro puntos coplanares de una curva de Viviani cortan ulteriormente a la curva en otros cuatro puntos igualmente coplanares.

En efecto, sean los cuatro planos osculadores en los puntos: t_1, t_2, t_3, t_4 , tales que:

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

Estos cortan ulteriormente a la curva en los respectivos puntos: t'_1, t'_2, t'_3, t'_4 , tales que:

$$t_1^3 t'_1 = 1 \quad , \quad t_2^3 t'_2 = 1 \quad , \quad t_3^3 t'_3 = 1 \quad , \quad t_4^3 t'_4 = 1$$

⁽¹⁾ V. p. ej: Notas sobre la determinación elemental del centro de curvatura en los vértices de las cónicas, por C. C. D., Revista de mat. y fís. elem. año II, Núm. 9 (21), Enero 1921.

las cuales multiplicadas miembro a miembro, y teniendo en cuenta la primera relación, nos dan:

$$t_1' t_2' t_3' t_4' = 1$$

lo que nos dice que también estos cuatro puntos son coplanares.

Es claro que vale el teorema correlativo para la hipérbola, que tampoco sabemos si ha sido enunciado con anterioridad.

9. — Queremos decir algo a propósito de las propiedades curiosas que han hecho de la curva de Viviani una curva clásica de los cursos de matemáticas, y que se relacionan con el área y el volumen del hemisferio sobrante, y de las cuales la primera ha servido también para descubrirla.

Las fórmulas relativas a la proyección estereográfica imponen en la esfera un sistema natural de coordenadas curvilíneas, que tampoco hemos visto emplear en estas cuestiones, a saber: el que está constituido por las curvas que se deducen en tales fórmulas suponiendo respectivamente: $x = C^{te}$, $y = C^{te}$. Tales son las circunferencias determinadas sobre la superficie esférica por los haces de planos trazados por el centro de la proyección estereográfica y cuyos ejes son respectivamente paralelos al eje de las ordenadas y al eje de las abscisas.

Llamando: ds al elemento de arco en el plano: (x, y) , y ds_1 al elemento de arco correspondiente sobre la esfera, sabemos según la teoría de las superficies que

$$ds_1^2 = E dx^2 + 2 F dx dy + G dy^2$$

donde:

$$E = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2, \quad F = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \quad G = \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2$$

y efectuado el cálculo obtenemos:

$$E = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad F = 0, \quad G = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

y por lo tanto, y puesto que: $dx^2 + dy^2 = ds^2$, resulta:

$$ds_1^2 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} ds^2$$

Este resultado expresa, sin más cálculos, en virtud de argumentos bien conocidos de la teoría de las superficies, que la proyección estereográfica es una transformación conforme, cuya razón de semejanza es: $\frac{2}{x^2 + y^2 + 1}$

Pero entonces, llamando: $d\sigma_1$ y $d\sigma$ a los elementos de áreas correspondientes en una proyección estereográfica, la razón entre ambos será igual al cuadrado de la razón de los elementos de arco, o sea:

$\frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$, y por lo tanto podemos escribir:

$$d\sigma_1 = \frac{4}{(x^2 + y^2 + 1)^2} d\sigma$$

como se deduce también, en forma inmediata, de la fórmula general: $d\sigma_1 = \sqrt{EG - F^2} d\sigma$.

De aquí resulta que si: Ω_1 es un área esférica cuya proyección estereográfica es: Ω , se verificará:

$$\Omega_1 = \iint_{\Omega} \frac{4 \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

El cálculo de esta integral doble se efectúa muy fácilmente transformándola en coordenadas polares, con lo cual, descomponiéndola en integrales simples nos da lo siguiente:

$$\Omega_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\rho_2(\theta)}^{\rho_1(\theta)} \frac{4 \, \rho}{(\rho^2 + 1)^2} d\rho;$$

y como la integral respecto de ρ vale:

$$\left[\frac{-2}{\rho^2 + 1} \right]_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} = \frac{2(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(\rho_1^2 + 1)(\rho_2^2 + 1)}$$

resulta en definitiva:

$$\Omega_1 = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{(\rho_1^2 + 1)(\rho_2^2 + 1)} d\theta,$$

fórmula que parece igualmente nueva.

En la aplicación de la misma —parece obvio recordarlo— es menester evitar la presencia de elementos simétricos respecto del polo 0 en el plano (x, y) , y para los cuales la suma sería aparentemente nula, pero las pequeñas modificaciones que es necesario introducir en el cálculo para salvar este inconveniente no ofrecen mayores dificultades.

10. — Volviendo ahora sobre el área del hemisferio sobrante, que constituye el objeto del primero de los dos teoremas clásicos de la curva, cabe proceder de la siguiente manera:

Si trazamos por el nodo los círculos máximos tangentes a la curva en dicho punto, como sus proyecciones estereográficas son justamente las asíntotas de la hipérbola imagen, tendremos determinados dos husos esféricos en cuyo interior está íntegramente contenida la curva de Viviani.

La abertura de cada uno de tales husos es igual por lo tanto al ángulo formado por las asíntotas de la hipérbola, y como éstas son perpendiculares resulta que la suma de ambos es igual a un hemisferio.

Luego si de la suma de tales husos excluimos la porción interna a la curva de Viviani, tendremos un área: Ω_1 que es justamente la que constituye el objeto del teorema que nos ocupa.

Dicha área: Ω_1 tiene como proyección estereográfica la región del plano (x, y) comprendida entre la hipérbola imagen y sus asíntotas.

Luego, si recordando la ecuación polar de la hipérbola: $\rho^2 = \frac{1}{\cos 2\theta}$ aplicamos la fórmula obtenida anteriormente al huso para el cual θ varía entre: $-\frac{\pi}{4}$ y $+\frac{\pi}{4}$ deducimos:

$$\frac{\Omega_1}{2} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{2 \cdot \frac{1}{\cos 2\theta}}{\frac{1}{\cos 2\theta} + 1} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = 2$$

y por lo tanto: $\Omega_1 = 4$, en lo que consiste el teorema conocido.

11. — Otra propiedad igualmente bien conocida de la proyección estereográfica consiste en lo siguiente: Si se adoptan como centros los polos diametralmente opuestos del cuadro, las proyecciones estereográficas de un mismo punto de la esfera son dos puntos inversos respecto de la circunferencia obtenida cortando con el cuadro.

Como la curva inversa de una hipérbola equilátera respecto de su circunferencia principal es una lemniscata de Bernouilli, de allí resulta que el teorema fundamental puede enunciarse en la siguiente forma equivalente a la primera: *La proyección estereográfica de una curva de Viviani, efectuada tomando como centro el punto de la esfera diametralmente opuesto al nodo de la misma, es una lemniscata.*

12. — Es curioso que la proposición anterior sea probablemente conocida, pues Loria, en su documentada obra: *Curve sghembe, etc.*, t. II, pág. 53, demuestra directamente el siguiente teorema: « Sobre el diámetro de un círculo máximo de una esfera de radio 1 que pase por este diámetro, y en el plano de un círculo máximo, se describe una lemniscata, de la cual se efectúa la proyección desde uno de los polos de dicho círculo. Esta proyección recubre una parte del correspondiente hemisferio y lo restante es igual al cuadrado del diámetro de la esfera ». Pero no hay mención en el texto de que este hecho proviene de que dicha proyección es justamente una curva de Viviani.

En cuanto al teorema fundamental, existen varias proposiciones más generales, relativas a cuárticas alabeadas, de las cuales podría derivarse como caso particular, pero no sabemos si ha sido formulado anteriormente el enunciado preciso que corresponde a la curva que nos ocupa. En la misma obra antes mencionada se hace referencia a una proyección de la curva, efectuada tomando como centro un vértice, y que carece de interés.

La representación paramétrica que hemos deducido de dicho teorema es tal vez la más sencilla entre las diversas que corresponden a la curva, como lo comprueba la forma simple que adopta la condición para que cuatro puntos sean coplanares. Otra representación distinta puede verse en la obra citada, t. I, p. 203.

Es claro que tratándose de curvas tan antiguas cualquier pretensión de originalidad carece de fundamento serio sin una prolija investigación bibliográfica previa. Pero ésta hubiera obligado a una labor desproporcionada quizás con la importancia del asunto, y cuyo interés sería de todas maneras ajeno al mismo.

Estando ya en prensa este trabajo nos informamos de que la proposición fundamental que le sirve de origen se encuentra indirectamente enunciada, y sin demostración, en la colección de *Esercizi di Geometria analitica*, de Agostini y Bortolotti, t. II, parte 2ª, vol. I, § 1110, pág. 127, lín. 13 y 14. La misma curva de Viviani sirve de tema en dicha colección para formular numerosos ejercicios de cátedra, pero ha pasado desapercibida la circunstancia de ser dicha propiedad la más orgánica quizás de todas las propiedades de tal curva.

MICRODETERMINACION CERIMETRICA DE GLUCOSA

SOBRE 0.01 ml. DE SANGRE

POR REINALDO VANOSSI Y RAUL FERRAMOLA

Como continuación de nuestros trabajos sobre determinación de glucosa en soluciones puras ⁽¹⁾ y en sangre, operando sobre 0,1 ml. ⁽²⁾, expondremos ahora un método para realizarla sobre 0,01 ml. el cual, consideramos, puede tener sumo interés en todos los casos en que se trate de efectuar determinaciones sucesivas y a cortos períodos. La desproteinización la efectuamos, también, por acción de hidróxido de aluminio, que se forma agregando solución de carbonato de sodio sobre la mezcla de sangre y solución de sulfato de aluminio, en caliente. El líquido filtrado está listo para someterlo a la acción oxidante del ferricianuro, medio alcalino (carbonato de sodio), en caliente, valorando, finalmente, en frío, el ferrocianuro formado mediante una solución de sulfato cérico 0,00025 *N* e indicador, violeta de metilo (propuesto por nosotros oportunamente) ⁽³⁾.

Previamente hemos estudiado:

- 1) Influencia de la fracción soluble del desproteinizante sobre el ferrocianuro y ferricianuro.
- 2) Acción de dicha fracción durante el proceso de oxidación de la glucosa.
- 3) Influencia del hidróxido de aluminio sobre la glucosa.

Hemos operado con las siguientes cantidades de reactivos:

Para la desproteinización: 1,80 ml. de solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$, 18 H_2O al 0,42 % y 0,35 ml. de solución de CO_3Na_2 , al 1 %; para la

⁽¹⁾ *Anales Asociación Química Argentina*, **23** p. 162; 1935.

⁽²⁾ *Anales Sociedad Científica Argentina*; **121** p. 59; 1936.

⁽³⁾ *Anales Asociación Química Argentina*; **20** p. 96, 1932, y *Ann. Chimie Analytique*, Octubre Noviembre 1933.

oxidación: 0,85 ml. de solución de ferricianuro 0,005 *N* conteniendo CO_3Na_2 , en concentración 0,2 *N*. El volumen final de los líquidos, listos para la oxidación, fué de 6 ml. y después de un calentamiento a B. M. de 5' se efectuaron, en frío, las valoraciones con solución de sulfato cérico 0,00025 *N*, en presencia de una gota de solución de violeta de metilo al 0,1 %. Las razones por las cuales elegimos estos detalles de técnica se fundan en los resultados de nuestros trabajos anteriores (¹⁻²). Respecto del primer punto, se han efectuado los ensayos de acuerdo con un plan seguido en aquellos trabajos. Las cantidades de ferricianuro y ferrocianuro han sido tales, que correspondían a las que intervienen en determinaciones de 0,003 a 0,03 mg. de glucosa, es decir, la situación que se presenta habitualmente en las determinaciones efectuadas sobre 0,01 ml. de sangre.

Los resultados indican que la fracción solución del desproteinizante no afecta el comportamiento del ferricianuro agregado, ni del ferrocianuro que se origina en el proceso.

El estudio del 2º punto se concreta en el CUADRO I.

CUADRO I

Gluc. mg.	Solución en	Tiempo de calentamiento en minutos			
		4	5	6	8
0.003	{ Agua destilada	0,28	0.29	0.29	0.30
	{ Sol. defecante	0.26	0.29	0.29	0.30
0.006	{ Agua destilada	0.57	0.59	0.59	0.59
	{ Sol. defecante	0.55	0.60	0.60	0.60
0.009	{ Agua destilada	0.86	0.90	0.90	0.90
	{ Sol defecante	0.84	0.90	0.91	0.91
0.015	{ Agua destilada	1.50	1.55	1.55	1.56
	{ Sol defecante	1.47	1.56	1.57	1.58
0.030	{ Agua destilada	3.02	3.10	3.12	3.12
	{ Sol defecante	2.99	3.11	3.14	3.14

Puede observarse que en menos de 5' de calentamiento a B. M. hay tendencia a que la parte soluble del desproteinizante afecte los resultados en pocas centésimas de ml. en menos; para mayor tiempo de calentamiento hay tendencia a obtener resultados ligeramente superiores. En 5 minutos, tiempo adoptado en la técnica, puede

considerarse que dentro de los límites de 0,003-0,03 mg. de glucosa no se produce influencia superior a 0,01 ml. de la solución cérica.

Hemos de indicar, en todo caso, que es importante tener en cuenta la pureza de las drogas empleadas, razón por la cual se impone la ejecución de un ensayo en blanco, efectuado periódicamente con la parte soluble del desproteinizante, en presencia de dos cantidades extremas de glucosa (por ej., 0,006 a 0,03 mg.), a fin de establecer las influencias que gravitan en las determinaciones.

En cuanto al 3er. punto, se ha observado que no hay adsorción de glucosa de parte del precipitado de $(\text{HO})_3\text{Al}$ y que son suficientes los dos lavados con agua caliente que se indican en la técnica (dentro de la aproximación de 0,01 ml. de sol. cérica) aun operando con cantidades extremas de glucosa, lo cual se explica por las concentraciones mínimas de glucosa presente.

MÉTODO

1) Solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$, 18 H_2O , al 0,42 %.

2) Solución de CO_3Na_2 al 1 %.

Estas soluciones se corresponden ca. estequiométricamente en la relación de volúmenes 5:1.

Por tal razón conviene asegurarse que el $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$, 18 H_2O , contiene la riqueza en óxido que dá la fórmula. Un ensayo aproximado puede hacerse mezclando 5 ml. de la solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$ al 0,42 % con 1 ml. de la solución de CO_3Na_2 , calentar y filtrar. El líquido filtrado se divide en dos partes; ninguna de ellas debe dar precipitado (10 minutos) al agregar a una, 1 gota de la solución $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$ y a la otra una de ClH y luego 2-3 de NH_3 , en caliente. Una concentración inadecuada de cualquiera de las dos soluciones puede originar una desproteinización deficiente de la sangre.

3) Solución de $\text{Fe}(\text{CN})_6\text{K}_3$, 0,005 N (1,65 g. $\frac{\%}{100}$) con alcalinidad en CO_3Na_2 , 0,2 N (10,6 g. $\frac{\%}{100}$). Esta solución se conserva bien al abrigo de la luz.

Por otra parte, la variación que sufre se determina con el ensayo en blanco.

4) Solución de SO_4H_2 , 20 N (aproximada). Diluir 557 ml. de SO_4H_2 , d: 1,84 hasta 1 litro.

5) Solución de violeta de metilo 6 B al 0,1 %. Esta solución se debilita con el tiempo, pero entonces basta emplear mayor cantidad al hacer las valoraciones.

6) Solución de $(\text{SO}_4)_2\text{Ce}$ 0,00025 *N*. Se prepara por dilución en ácido sulfúrico *N* de una solución 0,1 ó 0,05 *N*(*) Dentro de las primeras horas, si el ácido sulfúrico y el agua destilada son de la mayor pureza, esta solución posee el título de la solución original, disminuyendo luego paulatinamente, aun conservándola en la obscuridad, de suerte que a los 15 días su título baja de un 2 ½ a un 3 %.

Por lo tanto, existen dos alternativas: o prepararla en el momento del uso, con agua y ácido de la mayor pureza, o tener stock de solución y valorarla cada vez con solución reciente de $\text{Fe}(\text{CN})_6\text{K}_4 \cdot 3 \text{H}_2\text{O}$, 0,0005 *N* (0,2110 g. por litro). Este ferrocianuro debe tener su contenido de agua exactamente determinado, o sino, mejor ha de conocerse su valor oxidimétrico.

La valoración se efectúa con 5-10 ml. de la solución de ferrocianuro agregando 0,25-0,50 ml., respectivamente, de ácido sulfúrico 20 *N* y 2 gotas de solución de violeta de metilo al 0,1 % y luego la solución cérica hasta virada. Insistimos en que hacia el final debe agregarse esta solución de a gotas, cada 1-2 segundos (tiempo de inercia del indicador), considerando el final cuando el color amarillento resultante es estable 4-6 segundos (según el exceso, respecto al punto estequiométrico que representa la última gota agregada). Del valor aquí obtenido se debe deducir el gasto que se obtiene de un ensayo con agua destilada y en las mismas condiciones (igual acidez anterior e indicador).

7) Solución de glucosa. Se ha empleado droga con pureza determinada por polarimetría y yodometría (Schoorl), de donde resultó un valor de 99,60 %. Con esta droga se preparó directamente solución al 0,3 ‰ y a partir de ésta, la solución 0,03 ‰ (estable 12 horas como mínimo).

8) Tubos de vidrio para la defecación de 8×70 mm. aproximadamente, con pico; embudos de 25-30 mm. de diámetro; tubos para la oxidación de 15×150 mm. de espesor de paredes 0,7-0,8 mm.; pipetas de 2 y 1 ml. graduadas y de 0,01 ml. de volumen contenido exactamente contraloreado; bureta de 5 ml. al 150 ml. Este material lavado con mezcla sulfocrómica caliente y agua destilada.

En lugar de la pipeta de 0,01 ml., es recomendable emplear la

(*) La solución 0.05 *N* se prepara disolviendo 11 g. de $(\text{SO}_4)_2\text{Ce}$, $4\text{H}_2\text{O}$ en 500 ml. de SO_4H_2 *N*, o sino partiendo del CeO_2 , por la técnica indicada en nuestro anterior trabajo (*). Esta solución conserva su título prácticamente inalterado durante 1-2 años.

pipeta con ensanchamiento (véase figura de la cita 2). Se determina el volumen contenido mediante la solución 0,1 *N* de ferrocianuro, con la cual se carga la pipeta hasta cierta altura que se marca provisoriamente; se seca bien la extremidad, exteriormente y se arrastra con agua destilada, introducida en el ensanchamiento, haciendo la valoración mediante la solución cérica 0,00025 *N*. Considerando el título de la solución cérica respecto del ferrocianuro, se deduce el volumen y mediante ensayos de este tipo se puede, al fin, marcar definitivamente 0,01 ml. exacto.

Toma de la muestra. — La sangre para el análisis se obtiene por punción en la forma corriente, pipeteando directamente hasta un poco más arriba del enrase, a fin de ajustar luego exactamente 0,01 ml. mediante repetidos toques con papel de filtro en la extremidad de la pipeta previamente limpia en su parte exterior. Debe notarse que inclinando convenientemente la pipeta, la sangre asciende en la pipeta por simple capilaridad.

El uso de anticoagulantes (oxalatos, fluoruros, citratos, etc.) es prohibitivo, de modo que si se ha de operar sobre sangre de punción venosa, ésta debe desfibrinarse con perlas de vidrio. Sin embargo, se puede conservar, también, la muestra por algunas horas, tratándola, apenas extraída, por la solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$, o mejor, efectuando la desproteinización con el CO_3Na_2 , sin filtrar. Este líquido filtrado a las 24 horas (previo calentamiento a 80-90°) acusa prácticamente el valor en glucosa (temperatura de conservación: 15-25°); en cambio, conservado sólo en la solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$, si bien encontramos a las 3-4 horas un resultado normal, a las 24 horas es aproximadamente 2 % más alto.

Desproteinización. — En un tubo de los indicados para la defecación se introduce 1,8 ml. de la solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$; se deja escurrir la sangre contenida en la pipeta hasta el fondo y luego se lava, aspirando suavemente el líquido límpido de la parte superior, operación que se repite a fin de eliminar todo resto de sangre del interior de la pipeta.

Usando la pipeta con ensanchamiento, basta introducir en aquél a la solución de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$ y luego soplar para arrastrar el todo al tubo de desproteinización.

La mezcla se agita y se coloca en un B. M. (o a llama directa sin llegar a ebullición) hasta que el líquido adquiera un color ligeramente pardo (ca. 30"), se vierte en seguida 0,35 ml. de la solu-

ción de CO_3Na_2 al 1 %, se agita y se sumerge al B. M. alternativamente, o a llama directa en las condiciones indicadas, hasta la obtención de un coágulo que deje por reposo de algunos segundos un líquido límpido sobrenadante. Es fundamental para obtener una buena coagulación, agitar repetidas veces sin exceso de energía, mientras se calienta. Alcanzado este punto, se deja de calentar, se reposa unos segundos y se filtra.

Filtración.—La filtración se efectúa a través de algodón de vidrio. Unas fibras de éste se colocan en el pequeño embudo, mojando y empujando con el extremo de la varilla el algodón en forma de provocar la reunión de las fibras en el cuello del embudito. Se lava repetidas veces con agua hirviente.

La solución con la sangre coagulada caliente se vierte en el embudo colocado sobre uno de los tubos indicados para la oxidación y una vez filtrada se lava 2 veces, tubito y embudo, con 1,5 ml. por vez de agua hirviente.

El líquido final que queda en el embudo se deja caer levantando cuidadosamente con un alambre un borde del block filtrante.

La filtración normal dura en total de 3 a 4 minutos y debe evitarse que ésta se prolongue, pues los resultados quedan afectados. En caso de que el filtro se obture, cosa que rara vez sucede, basta mover ligeramente con un alambre fino la superficie del coágulo depositado sobre la lana de vidrio.

Oxidación.—Se vierte en el tubo que contiene el líquido filtrado 0,85 ml. de la solución de ferricianuro alcalino, llevándolo, previa agitación, a un B. M. hirviente, donde quedará 5 minutos exactos. La interrupción de la ebullición en el baño, al introducir él o los tubos, no debe ser superior a 5-10". Al finalizar los 5 minutos del calentamiento, se sumerge el tubo, en seguida, en agua fría, la cual se renovará hasta total enfriamiento.

Valoración.—Se acidifica el líquido con 0,3 ml. de SO_4H_2 , 20 N, se agrega una gota del indicador violeta de metilo, y se valora con la solución de $(\text{SO}_4)_2\text{Ce}$, 0,00025 N, hasta que el color verdoso del líquido pase al amarillento. Recordaremos que hacia el final debe agregarse el reactivo de a gotas cada 1-2 segundos y debe considerarse terminada la valoración cuando queda prácticamente estable 4-6 segundos.

Ensayo en blanco. — Simultáneamente con el ensayo anterior, se ejecuta uno con 6 ml. de agua destilada y 0,85 ml. de la solución de ferricianuro alcalino, calentando el mismo tiempo, enfriando, acidificando y valorando con la solución cérica en la forma indicada. El valor del ensayo en blanco está comprendido entre 0,10-0,20 ml.

Si las soluciones de $(\text{SO}_4)_3\text{Al}_2$ y CO_3Na_2 no tienen la pureza que corresponde, el ensayo en blanco debe hacerse así: Se provoca la formación de precipitado de $(\text{HO})_3\text{Al}$ en un tubo de defecación en las condiciones conocidas, se centrifuga, recogiendo el líquido. Se completa con agua hasta 5,15 ml. y se agrega 0,85 ml. de ferricianuro alcalino, continuando como es de práctica.

En trabajo habitual se puede tener stock de soluciones y efectuar este ensayo sólo periódicamente, limitándose cada vez a efectuar el ensayo simple con agua destilada.

Cálculo de los resultados. — Del dato obtenido con la sangre, se resta el del ensayo en blanco y el valor resultante se multiplica por el factor de la solución cérica (determinado respecto a ferrocianuro 0,0005 N).

Los ml. de solución cérica 0,00025 N, exactos, multiplicados por el factor « cerio-glucosa », dará los mg. de glucosa contenidos en 0,01 ml. de sangre.

Este factor es, para cantidades de glucosa superiores a 1,50 g. ‰ (1,55 ml. de $(\text{SO}_4)_2\text{Ce}$, 0,00025 N), igual a 0,0097.

Para sangres normales, el gasto de solución cérica es inferior a dicha cantidad y en consecuencia corresponde usar el factor que resulta de la siguiente fórmula ⁽¹⁾ :

$$f = 0,01044 - 0,00047 \times a$$

siendo a el número de ml. de solución cérica 0,00025 N.

Aproximadamente pueden utilizarse los siguientes factores:

CUADRO II

Gasto aproximado de Ce 0 00025 N	Factor
0.5 ml.	0.0102
1.0 ml.	0.0100
1.3 ml.	0.0098

El siguiente cuadro corresponde a sangre de individuos **normales** y diabéticos analizados por los métodos de Hagedorn y Jensen, cerimétrico para 0,1 ml. de sangre que publicamos con anterioridad y el que ahora proponemos sobre 0,01 ml.:

Nota: La aproximación con que hemos deducido los factores para calcular la glucosa, en soluciones puras, y operando en las condiciones indicadas en el presente trabajo, es de 0.9 %. En el caso de operar con sangres, debido particularmente a la naturaleza del coágulo, esa aproximación debe ser forzosamente inferior y puede considerarse en general alrededor del 3 %.

CUADRO III

Sangre Nº.	Hagedorn-Jensen	Cerimétrico sobre 0.1 ml.	Cerimétrico sobre 0.01 ml.
1	0.110	0.115	0.116
2	0.088	0.090	0.093
3	0.104	0.102	0.105
4	0.082	0.080	0.090
5	0.096	0.096	0.092
6	0.108	0.106	0.104
7	0.146	0.150	0.146
8	0.111	0.115	0.119
9	0.225	0.220	0.228
10	0.198	0.202	0.202
11	0.099	0.102	0.110
12	0.079	0.080	0.080
13	0.094	0.096	0.094
14	0.102	0.098	0.100
15	0.220	0.215	0.220
16	0.120	0.116	0.118
17	0.090	0.090	0.090
18	0.140	0.133	0.140
19	0.170	0.172	0.180
20	0.080	0.080	0.084
21	0.098	0.095	0.093
22	0.100	0.098	0.102
23	0.086	0.088	0.084
24	0.152	0.160	0.154
25	0.078	0.080	0.080

(mg. de glucosa %)

Queremos significar, por último, que sería posible determinar glucosa utilizando sólo algunas milésimas de ml. de sangre operando

con una parte alícuota del líquido filtrado después de la desproteínización, es decir, evitando los lavados y haciendo actuar sobre ese volumen (1,9-2 ml.), cierta cantidad de ferricianuro, y valorando al final con solución cérica de concentración inferior a 0,00025 *N*; ya que en un volumen de 2-2 ½ ml. se obtiene suficiente sensibilidad de virada con una gota, o fracción, de solución cérica de extrema dilución. Por otra parte, hemos efectuado también algunos ensayos empleando el sistema de la pipeta filtro, que utilizamos con buen resultado en el caso de 0,1 ml. de sangre ⁽²⁾, completando luego el volumen final de 6 ml., para estar en condiciones de comparación con la técnica normal. Los resultados obtenidos han sido, en general, de 0,03 a 0,07 ml. (3 a 6 %) de sulfato cérico 0,00025 *N* superiores a los que daba la técnica por filtración común. Atribuimos esto más probablemente a la influencia de las fibras de algodón vegetal utilizados para el filtro.

En todo caso, quedan aún en pie las posibilidades que terminamos de mencionar.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS,
FÍSICAS Y NATURALES
DE BUENOS AIRES

EL COBRE EN EL SER HUMANO

Por P. MAGNE DE LA CROIX

RÉSUMÉ

Les pigments respiratoires existant dans l'échelle végétale et animale, sont des complexes comprenant non seulement magnésium et fer sinon aussi: cuivre, vanadium et manganèse.

Or si le cuivre joue un rôle évident dans l'économie de tous les mammifères il résulte que ce rôle est plus important et que la distribution de ce métal est plus abondante chez l'homme et certains de ces animaux que chez la majorité des autres.

En un reciente artículo publicado en los *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, el doctor E. V. Zappi nos recordó los trabajos de Hans-Fischer que demostraron que « el núcleo de la *porfina* constituye el esqueleto común de los colorantes de la sangre y de las hojas » y que estas investigaciones habían adquirido después una « verdadera trascendencia filosófica al comprobarse que los diversos *pigmentos respiratorios*, distribuidos en toda la escala animal y vegetal, son complejos metálicos de la *porfina*, no sólo con el hierro o con el magnesio, como en el caso del hemo o de la clorófila, sino también con otros metales: *cobre, vanadio o manganeso* ».

Uno de estos metales: el cobre, desempeña un papel muy importante, al lado del hierro en ciertos mamíferos, entre los cuales se destaca el hombre, y por eso parece interesante de traer la atención sobre los recientes trabajos que hicieron a este respecto los señores Lesné, Zizine y Briskas.

La leche de mujer tiene una proporción de cobre grande si se la compara a la de la mayoría de las leches de otros animales y notablemente a los que se acude para obtener leche para los chicos que su madre no puede alimentar.

Pero hay algunos animales que tienen tanto cobre en la leche como el hombre, y entre ellos se destacan las ratas. Esto ha permitido comprobar el resultado nefasto que produce la alimentación

con una leche no bastante rica en cobre en jóvenes seres necesitados de una leche rica en este metal; jóvenes ratas fueron alimentadas con leche de vaca pobre en este metal y casi todas murieron, mientras que los testigos alimentados con leche rica en este metal se criaron muy bien.

Varias búsquedas sobre la cantidad de cobre contenido en la leche de vaca han determinado su poca riqueza al respecto; a pesar de una cierta confusión que resultaba del hecho que no se había tenido en cuenta ni los diferentes períodos del año, ni los momentos de la lactación en los cuales se había hecho el análisis.

Elvehejem, Lindou y después Mac Farlan hicieron posteriormente investigaciones teniendo en cuenta estos varios períodos, pero las que trajeron la luz completa sobre esta cuestión son las más recientes hechas por Lesné, Zizine y Briskas, perfeccionando los procedimientos de los buscadores anteriores. Estas investigaciones han permitido comparar bien exactamente la cantidad de cobre contenida en la leche de vaca y la de mujer; he aquí los resultados que dieron:

PARA LAS VACAS

(La proporción ha sido establecida sobre varias cantidades de leche tomadas en varios períodos de lactación).

<i>Vaca A</i>		<i>Vaca B</i>	
Cantidad de leche empleada	Proporción de cobre en Mg por litro	Cantidad de leche empleada	Proporción de cobre en Mg por litro
500 cm ³	0,20	500 cm ³	0,15
200 »	0,16	250 »	0,14
200 »	0,21	200 »	0,16
300 »	0,22	100 »	0,15
200 »	0,18	50 »	0,17
150 »	0,23	50 »	0,16
100 »	0,19	50 »	0,15
50 »	0,18	25 »	0,13
50 »	0,18	25 »	0,14
25 »	0,20	25 »	0,16

PARA LAS MUJERES

El cobre se encontró en la leche de mujer en los diferentes períodos de la lactación en la proporción que sigue (el cobre es indicado en mg por litro).

1ª EXPERIENCIA

P. B. 32 años.—1er. alumbramiento

3º día	1,23	4º mes	0,60
10º día	0,95	6º mes	0,65
25º día	0,80	9º mes	0,60
2º mes	0,90		

2ª EXPERIENCIA

E. P. 32 años.—4º alumbramiento

2º día	0,95	3º mes	0,45
9º día	0,80	4º mes	0,30
1º mes	0,80	8º mes	0,26
2º mes	0,70		

3ª EXPERIENCIA

N. M. 24 años.—1er. alumbramiento

2º día	1,10	6º mes	0,65
13º día	1,05	8º mes	0,65
2º mes	0,75	14º mes	0,42

4ª EXPERIENCIA

R. G. 19 años.—1er. alumbramiento

2º día	1,13	4º mes	0,85
10º día	1,07	5º mes	0,93
1º mes	0,95	10º mes	0,90
2º mes	0,86		

5ª EXPERIENCIA

D. J. 27 años.—2º alumbramiento

1º día	0,95	3º mes	0,60
12º día	0,85	5º mes	0,57
1º mes	0,60	9º mes	0,57

Antes de estas series de observaciones extrañaban las diferencias existentes entre los porcentajes de cobre obtenidos, pero estas observaciones hechas en serie permiten darse cuenta que estas variaciones provenían de las varias épocas de la lactación en las cuales habían sido hechas las observaciones.

Lesné, Zizine y Briskas concluyen diciendo: « En la leche de mujer es el colostrum que posee la más grande cantidad de cobre; ésta varía de 1,23 mg hasta 0,75 mg por litro; a los dos meses se estabiliza entre 0,60 mg hasta 0,90 mg para bajar progresivamente hasta llegar entre 0,25 mg y 0,57 mg por litro ».

Estos autores señalan que las leches empleadas en substitución de la mujer, a saber: la de vaca, de cabra o de burra, padecen todas del defecto de una deficiencia en cobre evidente para las necesidades del niño y el grado de este defecto es igual en estas varias leches. « No hemos anotado, dicen ellos, diferencia a este respecto entre la leche de cabra, de vaca o de burra ».

En otro trabajo que comunicaron también a la « Société de Pathologie » de París los mismos autores señalaron que la leche de rata tiene una riqueza en cobre más o menos igual a la de mujer y que este hecho había permitido, como lo hemos señalado anteriormente alimentando jóvenes ratas con leche de vaca, darse cuenta del efecto que producía una leche pobre en cobre sobre el joven animal que la necesita rica en este metal. Para darse cuenta del efecto, otros jóvenes animales testigos fueron alimentados con leche de ratas. Esto permitió constatar el resultado desastroso que produce la insuficiencia de cobre en la leche absorbida por un animal que necesita una leche rica en este metal; casi todas las ratas alimentadas con leche de vaca murieron.

El profesor Noel Fiessenger que presidía la sesión en la cual se hizo esta comunicación hizo notar que de lo observado, parecía resultar que « había dos cobres: un cobre fisiológico y un cobre patológico que pueden fijarse en los mismos órganos. De todos modos, agregó, « el cobre fisiológico parece desempeñar un papel en la hemopoïese y a tal punto que actualmente se llega a preocuparse de la terapéutica de las anemias por medio del cobre ».

De esto resulta que la introducción complementaria de cobre fisiológico puede ser necesaria en ciertos casos en los adultos pero que es siempre útil la introducción de este cobre en los niños jóvenes; normalmente la leche maternal lo da, pero si hay que recurrir a otra leche, ni la de vaca, ni la de cabra, ni la de yegua o de burra la posee en cantidad suficiente; las ratas que también poseen cobre en la leche en bastante cantidad han podido servir de animales de experiencia, pero su pequeño tamaño impide que tengan interés en lo que se refier a la producción lechera.

La humanidad debería pues preocuparse de desarrollar la aptitud

lechera en animales de tamaño por lo menos mediano y poseyendo la riqueza necesaria de la leche en cobre, estos animales existen pero la humanidad que no mezquina gastos en la producción de elementos de destrucción no hará lo que sería necesario para desarrollar la aptitud lechera en estos animales; otro medio sería enriquecer en cobre conveniente que se puede sacar de los pulpos, la leche de los animales empleados generalmente como animales lecheros, pero este medio sería probablemente de más difícil realización.

SUR QUELQUES NOUVEAUX DÉRIVÉ FLUORÉS AROMATIQUES

PAR MME. A. CANNONI DE DEGIORGI ET ENRIQUE V. ZAPPI

RÉSUMÉ. — On a préparé les nouveaux composés fluorés suivants: *3-fluor-5-amino-anisol* (VIII) C_7H_5ONF , liquide huileux d'une couleur jaunâtre; son sulfate, $C_7H_5ONF \cdot SO_4H_2 \cdot 2H_2O$, écailles blanches et brillantes solubles dans l'eau. — *3-fluor-5-nitro-phénol* (IX) $C_6H_4O_3NF$, écailles blanc-jaunâtres, sublimables. F.: 112° . — *3-fluor-5-nitro-phénétol* (XIII), $C_8H_8O_3NF$, petits cristaux blanc-jaunâtres solubles dans l'éther du pétrole et l'alcool méthylique. F.: $63^\circ, 5-64^\circ$. — *3-fluor-5-nitro-aniline* (XIX) $C_6H_5O_2N_2F$, aiguilles jaune-orangé, solubles dans l'acide chlorhydrique 1:1. F: 116° . La structure attribué a ces substances a été confirmée par des diverses transformations.

Ayant l'intention d'établir la solidité de l'union fluorée dans le noyau diversement substitué, nous avons complété la série connue des dérivés aromatiques fluorés avec les quatre composés suivants:

3-fluor-5-amino-anisol (VIII) *3-fluor-5-nitro-phénol* (IX)

3-fluor-5-nitro-phénétol (XIII) et *3-fluor-5-nitro-aniline* (XIX).

Pour la préparation des trois premiers nous partons du *s*-trinitro-benzène (III) qui traité par le méthylate de sodium remplace un des groupes nitro par le méthoxyle, en donnant le *3*-*5*-dinitro-anisol (IV).

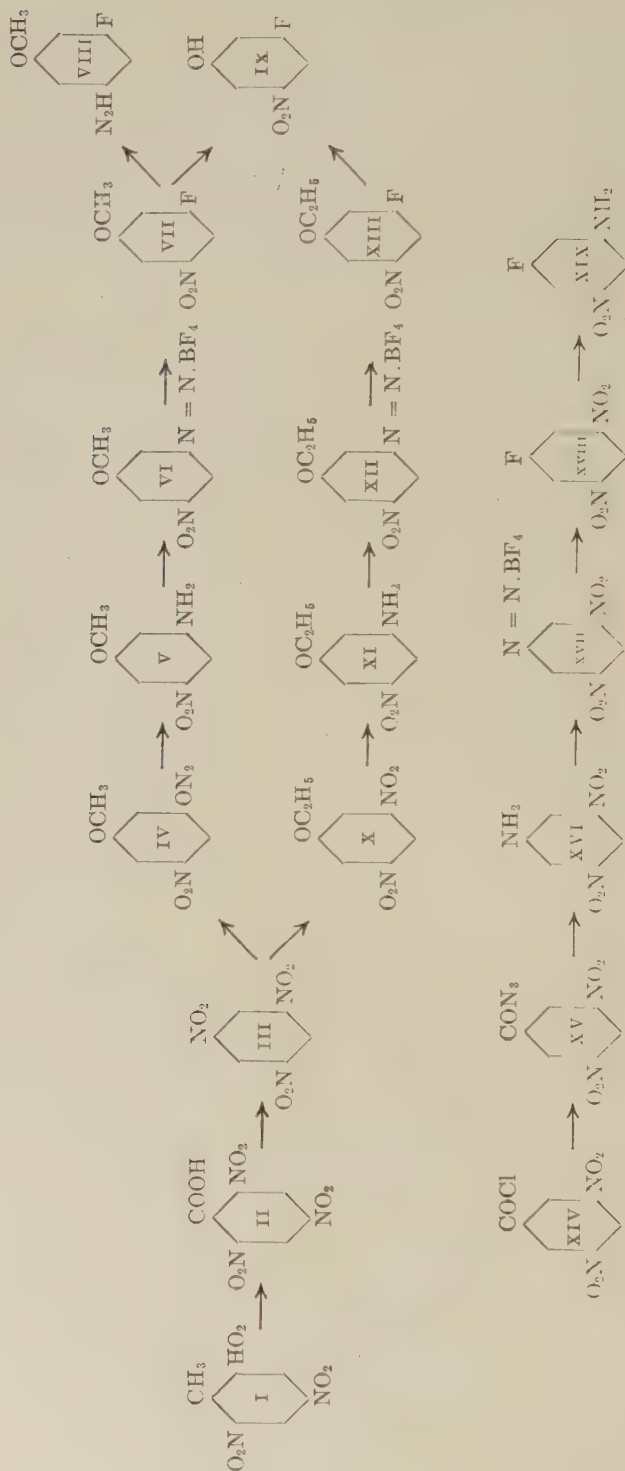
Celui-ci par réduction, avec du sulfure de sodium, produit le *3*-amino-*5*-nitro-anisol (V) dont le diazoïque, traité par la solution d'acide fluoborique, précipité le fluoborate de *3*-diazo-*5*-nitro-anisol (VI) que la chaleur décompose en azote, BF_3 et *3*-fluor-*5*-nitro-anisol (VII). La saponification de ce dernier avec de l'acide chlorhydrique concentré et sous pression, donna le *3*-fluor-*5*-nitro-phénol (IX).

L'obtention du *3*-fluor-*5*-nitro-phénétol (XIII) suit une marche analogue, après avoir traité le *s*-trinitro-benzène avec de l'éthylate de sodium.

Pour arriver à le *3*-fluor-*5*-nitro-aniline (XIX) nous avons transformé le chlorure de l'acide *3*-*5*-dinitro-benzoïque (XIV) dans l'azide (XV) et après dans la *3*-*5*-dinitro-aniline (XVI).

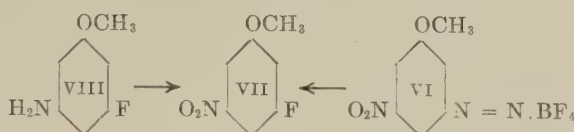
Celle-ci, diazotée a été transformée dans le fluoborate, qui chauffé se changea dans le *1*-fluor-*3*-*5*-dinitro-benzène (XVIII) dont la réduction partielle donna la *3*-fluor-*5*-nitro-aniline (XIX).

Le tableau suivant résumé les transformations dénombrées :



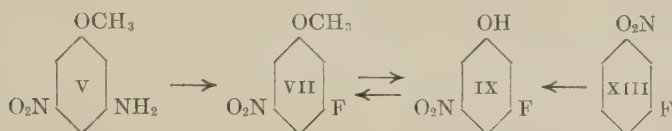
Le constitution de ces nouvelles substances se trouve confirmée par leur procédé de préparation et par diverses transformations.

Le 3-fluor-5-amino-anisol (VIII) possède la structure donnée parce que diazoté et décomposé en présence de nitrite de sodium il donne un 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) identique a celui obtenu par la décomposition thermique du fluoborate de 3-diazo-5-nitro-anisol (VI) :



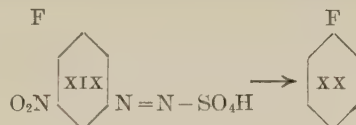
Le 3-fluor-5-nitro-phénol (XIII) possède la constitution assignée parce que son hydrolyse donna le même 3-fluor-5-nitro-phénol (IX) que celui obtenu par l'hydrolyse du 3-fluor-5-nitro-anisol (VII).

En plus, le 3-fluor-5-nitro-phénol (IX) méthylé produit le même 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) préparé par diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) :



Quant à la 3-fluor-5-nitro-aniline (XIX) le remplacement de sa fonction amido par l'hydrogène, donna le m-fluor-nitro-benzène déjà

cité dans la littérature :



PARTIE EXPÉRIMENTALE

Acide 2-4-6-trinitro-benzoïque (II) $\text{C}_7\text{H}_3\text{O}_8\text{N}_3$ et *s*-trinitro-benzène (III) $\text{C}_6\text{H}_3\text{O}_6\text{N}_3$

Ces corps on été préparés selon (1).

(1) *Organic Syntheses*, Collective Volume I, John Wiley Sons, New Kork, 1932; pp. 528 et 526.

3-5-dinitro-anisol (IV) $C_7H_6O_5N_2$

Sa préparation a été effectuée selon ⁽²⁻³⁾ en chauffant 106 g de trinitro-benzène dans 900 cm³ d'alcool méthylique ou l'on a dissous, préalablement, 12/13 g de sodium métallique. Par refroidissement se déposent des beaux cristaux. Récrystallisés de l'alcool méthylique, ils forment des aiguilles blanches. F. 105. Rendement: 90 g.

3-amino-5-nitro-anisol (V) $C_7H_8O_3N_2$

Nous avons modifié légèrement la méthode de Blanksma ⁽⁴⁾ pour la préparation de ce composé. Une solution de 7 g de 3-5-dinitro-anisol (IV) dans 250 cm³ d'alcool éthylique, est chauffée au bain-marie jusqu'à commencement de l'ébullition. On ajoute alors, par petites portions, une solution de 1,2 g de soufre dans 8,5 g de sulfure de sodium. Le liquide se colore en rouge foncé et après une demi-heure de chauffage commence à se déposer du thiosulfate de sodium. A ce moment l'auteur concentre la solution alcoolique pour précipiter l'amine. Nous avons trouvé que cette concentration donne naissance à des résines bien difficiles à éliminer. Par conséquent, au lieu de concentrer nous laissons refroidir la solution alcoolique, la filtrons et précipitons avec l'eau la nitroamine formés. On peut la purifier par dissolution dans HCl à 20 %, chaud, en filtrant et précipitant avec de l'ammoniaque.

Récrystallisée dans l'eau forme des aiguilles orangées. F. 120°.

Fluoborate de 3-diazo-5-nitro-anisol (VI) $C_7H_6O_3N_3F_4B$
et *3-fluor-5-nitro-anisol* (VII) $C_7H_6O_3NF$

Ces substances son été préparés par la diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol et précipitation de sa solution avec de l'acide fluoborique ⁽⁵⁾.

Le fluoborate constitue des aiguilles jaunâtres, très solubles dans l'eau froide. F.: 150° avec décomposition.

⁽²⁾ LOBBY DE BRUYN, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1890, t. 9; p. 208.

⁽³⁾ VERMELEFUM, idem, 1906, t. 25; p. 16.

⁽⁴⁾ BLAKSMA, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1909, t. 28; p. 111.

⁽⁵⁾ A. C. DE GIORGI, *Anales Asoc. Quím. Argentina*, 1936, t. 24; p. 1.

Sulfate de 3-fluor-5-amino-anisol (VIII) $C_7H_8ONF \cdot SO_4H_2 \cdot 2 H_2O$

On chauffe au bain-marie, pendant une demie-heure, 1,7 g de 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) avec 6 cm³ d'acide chlorhydrique (d. 1,19) et 1,3 g d'étain grénaillé. Le fluor-nitroanisole qui au commencement de la réaction reste en suspension. Se dissout au sein de la masse liquide, à mesure que la réduction progresse. Terminée la réaction, l'amine précipite comme sel double d'étain sous la forme de cristaux incolores et brillants. Pour obtenir l'amine ceux-ci dissous dans l'eau sont décomposée par l'hydroxyde de potassium, sous une couche d'éther. Par extraction avec ce dissolvant; en séchant avec de la potasse et évaporant les solvants, on obtient un liquide huileux, de couleur jaunâtre qui est le fluor-amino-anisol cherché. Rdt.: 0,85 g.

Dissous dans l'acide sulfurique diluée, en chauffant quelque peu, on obtient par réfractionnement les écailles blanches et brillantes du sulfate.

Analyse: Substance séchée sur SO_4H_2 dans le vide.

Dosage de S (SO_4Ba) et N (Dumas).

$C_7H_8ONF \cdot SO_4H_2 \cdot 2 H_2O$ calculé, S: 11,59 %. N: 5,07 %

trouvé, S: 11,51 %. N: 5,27 %

Pour démontrer sa structure nous avons procédé à sa transformation en 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) de la manière suivante: 0,7 g de 3-fluor-5-amino-anisol dissous dans 1 g d'acide nitrique (d: 1,4) et 2,5 g d'eau, sont diazotés avec une solution aqueuse de 0,7 g de nitrite de soude à la température de 10° à —5°. La solution diazoïque est versée dans un autre vase qui contient 2,5 g de sulfate de cuivre, 0,8 g de glucose et 5 cm³ d'eau. On ajoute 1 g de NaOH dissous dans 4 cm³ d'eau et on chauffe à l'ébullition le mélange jusqu'à observer la réduction du sel cuivrique. La solution refroidie est neutralisée avec un léger excès d'acide acétique; laissée reposer pendant un'heure, distillée avec la vapeur d'eau et le distillat extrait avec de l'éther. L'évaporation de l'éther donne un produit qui recristallisé dans l'alcool méthylique. F. 85°.

Le P. F. mélange avec du 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) préparé par la diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) ne donne pas de dépression.

3-fluor-5-nitro-phénol (IX) C₆H₄O₃NF

On hydrolyse 0,57 g de 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) en le chauffant avec 4 cm³ d'acide chlorhydrique (d. 1,19) dans un tube, pendant 5 heures à 170-180°. Après refroidissement on filtre la bouillie cristalline formée et récrystallise le produit dans HCl dilué.

Écailles soyeuses blanches, légèrement jaunâtres. F.: 112°. On peut les purifier aussi par sublimation. Rdt.: 0,45 g.

Analyse: Dosage de N (Dumas).

C₆H₄O₃NF calculé, N: 8,89 %

trouvé, N: 9,25 %

Méthylation du 3-fluor-5-nitro-phénol (IX)

0,15 g de 3-fluor-5-nitro-phénol sont dissous par léger chauffage, dans 0,22 cm³ de sulphate diméthylique et on ajoute lentement, 0,6 cm³ d'hydrate de sodium 5 N. Après quelques instants il se précipite une substance cristalline, qui est filtrée, lavée à l'eau et cristallisée dans l'éther de pétrole. F.: 85°. Le P. F. du mélange, avec du 3-fluor-5-nitro-anisol obtenu par diazotation du 3-amino-5-nitro-anisol (V) ne donne pas de depression. Rdt.: 0,17 g.

3-5-dinitro-phénol (X) C₆H₃O₅N₂

Pour arriver à ce produit nous avons suivi préférentiellement les indications de la littérature⁽⁶⁻⁷⁻⁸⁾. Suivants ces auteurs on maintient en contact pendant 15 jours, à la température ordinaire, la quantité théorique de s-trinitro-benzène avec une solution diluée d'éthylate de sodium ce temps. Écoulé ils distillent l'alcool presque à siccité et on purifie le produit, qui est souillé par une grande quantité de résines. Nous avons tourné cette difficulté en évitant la concentration du liquide de réaction et en provoquant la précipitation du dinitro-dérivé tout simplement par addition de son volume d'eau. De cette manière on obtient le produit tout à fait cristallisé. Recristallisé dans l'alcool, aiguilles rougeâtres. F.: 97,5°. Rdt.: 20 %.

⁽⁶⁾ LOBRY DE BRUYN ET VANT LEENT, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1894, t. 13; p. 153.

⁽⁷⁾ BLANKSMA, *ibidem*, 1905, t. 24; p. 40.

⁽⁸⁾ HERZIG ET AIGNER, *Monatsh.*, 1900, t. 21; p. 444.

3-amino-5-nitro-phénétol (XI) $C_8H_{10}O_3N_2$

Blanksma (7) réduit le 3-5-dinitro-phénétol (X) par l'hydrogène sulfuré. Nous avons trouvé plus commode d'effectuer la réduction par le sulfuré de sodium, comme il a été indiqué pour le 3-5-dinitro-anisol (4). Cristaux. F.: 115°. Rdt.: 30 %.

Fluoborate de 3-diazo-5-nitro-phénétol (XII) $C_8H_8O_3N_3BF_4$

Dans 3 cm³ d'eau, additionnée de 1,60 cm³ d'acide chlorhydrique (d. 1,19) on dissout 0,85 g de 3-amino-5-nitro-phénétol (XI) en chauffant légèrement. La solution est diazotée avec 0,50 g de nitrite de sodium dissous dans 1 cm³ d'eau, en maintenant la température à —5°, —10°. La solution filtrée est traitée avec 1,6 cm³ d'acide fluoborique au 40 %, ce qui précipite une masse jaunâtre et cristalline qui est séparée par filtration, lavée à l'acide fluoborique dilué, à l'alcool et après à l'éther. On sèche sur SO₄H₂ sous vide donna. Point de décomposition: 110°. Ddt.: 0,85 g.

Analyse: Dosage de N diazoïque, par décomposition avec SO₄H₂ dilué.

$C_8H_8O_3N_3BF_4$ calculé, N (de —N = N—): 9,94 %

trouvé, N (de —N = N—): 9,2 %

3-fluor-5-nitro-phénétol (XIII) $C_8H_8O_3NF$

La décomposition thermique du produit antérieur est initiée en chauffant dans un tube à 110°, et se propage lentement à toute la masse. Quand elle est terminée il reste un produit groudroneux et sur la surface du tube quelques cristaux groupés en fougère. Le tout est agité plusieurs fois avec de l'éther du pétrole, et les extraits sont évaporés, ce qui donne des cristaux impurs du 3-fluor-5-nitro-phénétol, qui sont purifiées par cristallization dans l'alcool méthylique en solution concentrée.

Petits cristaux, d'un blanc jaunâtre. F.: 63,5-64°.

Ddt.: g 0,85 de fluoborate ont donné 0,17 g de 3-fluor-5-nitro-phénétol.

Analyse: Dosage de N (Dumas).

$C_8H_8O_3NF$ trouvé, N: 7,86 %

calculé, N: 7,54 %

La saponification de ce produit, opérée par le procédé employé pour hydrolyser le 3-fluor-5-nitro-anisol (VII) donna le même 3-fluor-5-nitro-phénol. F.: 112°, que celui-ci.

3-5-dinitro-benzoazide (XV) $C_7H_3O_5N_5$

Cette substance a été préparée en suivant les indications de Blanksma et Verberg (⁹). Dans un mélange composé par 10 g de chlorure de 3-5-dinitro-benzoyle et 30 cm³ d'acide acétique glacial, on ajoute par petites portions, 3 g d'azide sodique. Après un'heure de contact on peut séparer la 3-5-dinitrobenzoazide par addition d'eau.

Recristallisée dans l'éther du pétrole elle forme des aiguilles incolores, avec Point de Décomposition: 107°.

3-5-dinitro-aniline (XVI) $C_6H_5O_4N_3$

Pour obtenir cette substance nous avons recours premièrement à la réduction du trinitro-benzène par le sulfhydrate d'ammonium, selon Kock (¹⁰) et, après, en suivant la méthode de Blanksma et Verberg (⁹) par décomposition de la 3-5-dinitrobenzoazide (XV) qui nous avons trouvée plus aisée.

2 g de l'azide mélangés avec 8 cm³ d'acide sulfurique concentré sont chauffés au bain-marie. Lorsque toute la dinitro-benzoazide est dissoute, on porte à l'ébullition le bain-marie, jusqu'à cessation du dégagement gazeux.

On laisse refroidir, après-quoi on verse dans l'eau et neutralise avec de l'ammoniaque, ce qui précipite la 3-5-dinitro-aniline.

Recristallisée dans l'eau. F.: 163°.

Fluoborate de 1-diazo-3-5-dinitro-benzène (XVII) $C_6H_3O_4N_4F_4B$
et *1-fluor-3-5-dinitro-benzène* (XVIII) $C_6H_3O_4N_2F$

Par la diazotation de la 3-5-dinitro-aniline et précipitation avec de l'acide fluoborique (¹¹) il se forme le fluoborate de 1-diazo-3-5-dinitro-benzène, cristallisé comme des aiguilles jaunes, très solubles dans l'eau. Point de Décomposition: 203°.

(⁹) BLANKSMA et VERBERG, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1934, t. 53; p. 988.

(¹⁰) KOCK, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1901, t. 20; p. 113.

(¹¹) A. C. DE DEGIORGI, *Anales Asoc. Química Argentina*, 1935, t. 23; p. 4.

La décomposition thermique de ce produit donne le 1-fluor-3-5-dinitro-benzène, qui forme des cristaux blanc-jaunâtres, de l'éther du pétrole, P. F. 43°.

3-fluor-5-nitro-aniline (XIX) $C_6H_5O_2N_2F$

Dans une solution de 0,9 g de 1-fluor-3-5-dinitro-benzène dissous dans 30 cm³ d'alcool et chauffée à l'ébullition sur un bain-marie, on verse lentement une autre solution de sulfhydrate d'ammonium (préparée avec 34 cm³ d'ammoniaque (d. 0,910), 7 cm³ d'alcool et 0,7 g d'hydrogène sulfuré). Le liquide prend une coloration rouge intense et après 20 minutes de chauffage on refroidit et filtre pour séparer le soufre précipité. La liqueur additionnée d'eau laisse déposer l'amine formé. Celle-ci est purifiée par dissolution à chaud dans une petite quantité d'acide chlorhydrique dilué de son volume d'eau, la solution est filtrée et l'amine régénérée par précipitation avec l'ammoniaque. Recristallisée dans l'eau, elle forme des belles aiguilles orangés. F.: 115°-116°. Rdt.: 0,4 g.

Analyse: Combustion.

Pour $C_6H_5O_2N_2F$ trouvé, C: 46,08 %, H: 3,22 %
calculé, C: 46,03 %, H: 3,44 %

Par diazotation elle se transforme dans une huile légèrement jaunâtre, identique au m-fluor-nitrobenzène⁽¹²⁾ ce qui confirme sa constitution.

Nous remercions la Asociación Argentina para el Progreso de las Ciencias, qui a subventionné la présente recherche.

(12) DE CRAUW, *Rec. Trav. Chim. Pays-Bas*, 1929, t. 48; p. 1061.

A INFLUENCIA DAS CONQUISTAS E DESCOBRIMENTOS DOS PORTUGUESES NO CONHECIMENTO DAS PLANTAS

POR LENCASTRE PEREIRA DE ANDRADE

I

A conquista da Ceuta em 23 de Julho de 1415, a descoberta do Porto Santo em 1418, e em 19 a do arquipélago de Madeira por João Gonçalves Zarco, Bartolomeu Perestrello e Tristão Vás Teixeira, onde êstes tentaram a cultura da vinha e cana de açúcar, queimando uma parte da impenetrável floresta e onde mais tarde os portugueses descobriram quasi todos os produtos da Fl. tropical: as ilhas Canarias, descobertas pelos portugueses em 1424, donde, conforme, Oviedo, « Hist. Nat. 1556 », o primeiro naturalista que visitou América, nos vieram bananeiras, introduzidas por estes no Malabar depois da viagem de Piso (¹ e entre outras a Tamareira (²).

Or arquipélago dos Açôres, descoberto por Gonçalo Velho Cabral em 1432, onde observando os produtos da zona temperada, tentaram alguns da zona torrida, com bananas, inhames e batata doce: a travessia do Cabo Bojador em 1434 por Gil Eanes que, intrépido, afrontou os pavores que amedrontavam todos os seus contemporaneos,

(¹) M. HUMBOLT, *Nouvelle Espagne* tambem concorda que as bananeiras foram destas ilhas, introduzidas na Republica de S. Domingos por Padre TOMÁS DE BERLENGAS, facto que o Padre JOSEPH DA COSTA na *Hist. Nat. des Indes*, 1608, confirma por tê-las visto cultivadas pelos americanos antes de chegarem os hespanhoes. MAROGRAF e Piso em vista das duvidas sobre a sua patria dizem que do Congo foram introduzidas no Brazil. São duvidas suscitadas por causa das especies e variedades.

(²) A Tamareira dos tempos prehistoricos foi conhecida do rei DAVID e MOISÉS. Por muito tempo se supôs ser indigena de Palestina, Assiria, Babilonia e dos oasis de Sahará. PLINIO dise ser das Canarias, facto oje confirmado por WEBB e BENTHELOT na *Hist. Naturelle des Canaries*, onde abundaram muitas plantas com apherencia de verdadeiras indigenas, donde as propagaram em outras partes.

é que abordando trouxe ao Infante D. Henrique, como um sinal da nova terra, umas ervas chamadas em Portugal Rosas de Sta. Maria, « que a maneira do ramo de oiro colhido por Eanes, eram o talismão que aos portugueses abria o paraíso da Índia ».

Toda a costa da África entre o Cabo Roxo e o Cabo Sagres ao norte da Serra Leão por Nuno Tristão e Alvaro Fernandes em 1446, onde os portugueses introduziram o Coqueiro que hoje predomina toda extensa costa entre os dois cabos, facto confirmado por De Martins na « Hist. Naturalis Palmarum », o primeiro que fez menção de coqueiro nesta vasta região, donde os missionários portugueses introduziram mais tarde na América: o arquipélago de Cabo Verde em 1454, coberto de bosques de palmeiras cujo promontório fôra descoberto por Diniz Fernandes em 1443, e posteriormente as outras ilhas, sendo a de S. Tiago por Diogo Gomes e António de Nola em 1460 (ou 1446?).

As ilhas de S. Thomé e Príncipe descobertas em 1470 e 1471 por João de Santarém e Pedro de Escobar no tempo de D. Afonso V, « Dois grandes jardins lançados por Deus no meio das aguas do oceano, como os oasis entre os areais de um deserto », como disse Francisco Maria Bordalo nas viagens na África e na América, e duma delas o nosso epico; « A ilha illustre que tomou o nome d'hum, que o lado a Deus tocou — onde observaram uma vegetação prodigiosa por toda a parte, como a árvore de canela, o café, o algodão e a cana de açúcar que se supõe ser originaria da Índia, Cochim-China e arquipélago da Índia, levada pelos árabes na idade média para Sicília, donde D. Henrique introduziu na Madeira, donde se propagou nas Canárias, Brazil, S. Domingos e outras partes.

O cotovelo do Sul da África, torneado por Bartolomeu Dias em 1488 (ou 1486?) através mandonhos perigos e terríveis tempestades, tendo-lhe sido dado porisso o nome de Tormentário, mais tarde, com esperança de chegar a Índia, denominado por D. João II, jubiloso com a noticia, com o outro mais ridente « Cabo de Boa Esperança », nome que a fortuna justificou:

Angola por Diogo Cão em 1486, onde os portugueses observaram matas que produziam quantidade de borracha, uma variedade de gomas resinas, abundância de bananeiras, (alimentação riquíssima da população), várias espécies de palmeiras, coqueiros, etc., e nas margens dos rios a vegetação equinoxial, ostentando-se majestosa, ficando espantados com a cura das úlceras escorbúticas, que os indígenas obtinham com o cozimento da casca duma anacardiácea de

género *Spondias*, frequentemente cultivada nas vizinhanças das povoações indígenas, onde após o descobrimento do novo mundo os viajantes portugueses no século XVI introduziram o cajueiro, originário da America intertropical, Antilhas, Brazil e Guyanas, o milho, originário conforme Piso, de Sonda, a mandioca espontanea no Brazil, pera do Mexico e Guyanas, a papaia, cuja patria é disputada, introduzida na India pelos portugueses, e conforme M. M. Correia Melo e Spence, originaria de Antilhas (*Memoire sur les Papay acées*), a cana de açúcar e outras plantas úteis conforme condições favoraveis a sua cultura.

A ilha de Moçambique descoberta por Vasco da Gama em 1 de Março de 1498, onde observaram uma vegetação exuberante, como a borracha, o ricino, a calumba, o cuddó, a malva, a digitalis, a sene, a salsaparilha, a palha de balgate e a batatinha, muito usada pelos indígenas, profusamente espalhados, onde introduziram a nossa mangueira trazendo-nos em troca a matomba (*Parinaria exelsa*) e o grão de Moçambique.

A descoberta, a mais colossal de todas que fez assombrar o mundo inteiro, e foi um golpe mortal para Veneza e Genova, — o descobrimento do caminho marítimo para India — pelo ousado navegador Vasco da Gama em 1498 no reinado de D. Manuel o Grande, que há mais de meio seculo os portugueses procuravam com admiravel arrojo, facto o mais importante que marcou uma era nova na História de Portugal, e fez com que os homens de todas as partes do mundo se conhecessem uns aos outros: estas e tantas outras descobertas, após a do novo mundo, de terras opulentas com vales e planicies de vegetação exuberante, de côres brilhantes e abundancia de frutos exquisitos e plantas raras cuja importancia estava escondida nas nevoas do futuro, muito concorreram para a exploração da Flora e Fauna dos vastissimos dominios, alargando-se espontaneamente em sua consequencia o comércio e navegação, que tornou Portugal o pais mais rico da Europa.

E poderia alguém ficar inactivo, quando tão risonhas perspectivas se abriam aos que tinham sede de riqueza, da fama ou glória? Não, sem dúvida, não.

A sede das descobertas, excitada pelas empresas dos portugueses, fez mais tarde atizar a actividade doutras nações ainda. Não deixaram os portugueses às outras nações a glória de explorar as riquezas, não só, das terras descobertas, nem mesmo, das terras conquistadas, repito mais uma vez.

Não o foi, e atestam evidentemente os numerosos documentos desde 1400 para cá.

II

A descoberta do novo mundo nos deu conhecimento de muitas plantas novas. A descoberta de América por Cristovão Colombo em 12 de Outubro de 1492 e a abertura de novos caminhos marítimos abriram uma era nova no conhecimento de plantas e deram ao mesmo tempo nova direcção ao comércio de drogas e doutros produtos.

São incalculáveis as consequências desta descoberta sobre os costumes e a civilização europeia. Ficou completamente transformado o nosso modo e vida pela introdução dos produtos alguns dos quais como o café, açúcar, tabaco, batata e milho tornaram-se desde logo artigos da primeira necessidade. Após o descobrimento do novo caminho prosseguiram os portugueses as suas conquistas e descobertas apesar mesmo de alguns dos seus precursores terem sido vítimas dos habitantes selvagens.

Ben sabiam que tinham de correr risco da vida, mas mais forte que os perigos era o ardor das descobertas, que superavam todas as dificuldades e o temor da morte.

A crença de que se encontrariam no mar do Sul grupos de ilhas, cheias de ouro, pedras preciosas, especiarias e pérolas excitava a imaginação e os incitava para as empresas.

Após o descobrimento do novo caminho antes que o espanhol João Grijalva descobrisse o Mexico, denominado « A Veneza no novo mundo » em 1518, conquistado depois por Fernando Corte a 1521 donde nos vieram entre outros o cardo santo, a goiabeira que abundam na Venezuela e Perú, e *Opuntia Dillenii*, a palmatória do inferno, introduzida pelos portugueses e naturalizada na India, imprópriamente denominada *Cactus indica*, figueira da India, antes que o espanhol Francisco Pizarro em 1525 descobrisse o Perú, denominado pelos indigenas « o pais de ouro », donde nos veio a *Physali Peruviana*, cultivada nas hortas, o balsamo de Perú, a *Arracacia esculenta*, a *Mirabilis jalapa*, maravilhas de Perú, ou boas noites e outras; antes que os franceses explorassem as costas do Canadá em 1533 e em 1562 se estabelecessem na Florida, e os inglezes na Virginia em 1606, donde nos veio o *Virginia Bird's Eye*; muito antes doutras nações, os portugueses, graças a sua boa estrela e esforços tinham conseguido fundar um vasto império no novo mundo,

encantados, como os espanhóis, da vegetação exuberante e verdura das imponentes florestas, povoados de aves do canto, do inebriante perfume das madeiras aromáticas e dos campos de floresta.

Nos principios de verão, em 24 de Abril de 1500 a nau de Gaspar de Lemos trouxe a Lisboa a noticia do descobrimento do Brazil por Pedro Alvares Cabral, donde entre várias plantas que, longe seria mencionar, nos vieram o cajueiro, o ananaz, do nome brasileiro Nana, que abunda nas regiões de Haiti e Mexico, fruto que desconheci-do como era, Carlos V hesitou em provar, quando se lhe ofereceu; baunilha, mandioca, grão-maluco, bouganvillea, arbusto espinhoso, muito vulgar no pais *Solanum Jacquinii*, bringela com frutos e fol-has espinhosas, o Cerens Cerens pautagonus, usado para sebes e amendoim, recebendo os brasileiros em troca entre várias outras plantas o gergelim, originario, conforme Piso, das ilhas de Sonda, o milho do Egipto, o café de Arabia e o de Liberia e o coqueiro levado de Goa pelos portugueses.

A descoberta do Brazil seguiu outra, cuja paternidade foi por algum tempo posta em dúvida. Ao aventureiro português Gaspar Corte Real, que se perdeu entre os gelos se deve a descoberta do vasto Canadá a quem deu o nome de «*Terra Verde*» em 1501, gloria por algum tempo disputada pela França, atribuindo-a ao seu célebre navegador Jacques, ficando porém frustrada em frente das cartas geograficas do seculo XVI em que figura este vasto dominio sob a denominação do Corte - Realis, como diz Pinheiro Chagas na sua História de Portugal.

Após estas duas descobertas no novo mundo, Duarte Pacheco em 1505 demonstrou logo a analogia das florestas dos paises, situados ao norte do sul do Equador sobre linhas isotermicas, e em 1506 Afonso de Albuquerque com a descoberta de Madagascar «*a ilha de Lua*», onde os portugueses foram dos primeiros europeus que apor-taram nos mandou a flor de pavão e V. edutis.

Com a conquista de Socotorá em 1507 tivemos o alôes, a herva babosa etc. e com a de Malaca por Afonso de Albuquerque nos vie-ram algumas plantas, entre outras os jambos de Malaca, a fruta de Adão, e o arbusto muito vulgar em Goa, *Quisqualis indica* (Ran-goön creeper).

A conquista de Molucas em 1512 nos trouxe o cravo da India, as carambolas, os bilimbinos, a noz moscada, a canela e a abobora branca.

Com as das ilhas Sonda também nos vieram algumas plantas das

quais merecem menção a mangosta e a árvore de pão que Rumfio diz ter visto em estado de selvagem nas matas destas ilhas, conforme alguns, originario de Java e Amboine, espalhada nas regiões equinoxiais de America, e o gergelim com a areca que de Martins diz ser também desta ilha.

Em 1519 Fernão de Fagalhães, atravessando o Pacifico, chegou a descobrir as Marinhas e Filipinas em 1521; nestas os espanhois introduziram o cacau, originario da Nova Granada, onde abunda em estado selvagem, e que viajantes portuguezes propagaram depois nas suas colonias.

Em 1560 o distinto jesuita José de Anchieta, vulto mais notável da Companhia de Jesus que no Brazil teve o titulo de Apostolo de America, descobriu a ipecacuanha e assinalou as suas propriedades eméticas.

Foi Gabriel Soares de Souza que em 1587 fez conheced as propriedades de jaborandi e sarsaparilha, indicando tambem a raiz de mandioca como vermifuga e antidiabética.

Foi também elle que preconizou a Nicotiana na rectite epidémica.

Muito antes que A. St. Hilaire, *Plantes usuelles des Bresiliens*, De Martins, *Fl. Brazil*, Piso, *Indiae, Utriusque*, 1650, Marcgraff e Piso na sua obra monumental, *Hist. Rerum Naturalium Braziliae*, 1648, descrevessem as plantas e produtos de Brazil, o mesmo Gabriel de Souza em 1587 havia indicado a ipeca para diarreia.

III

Estes e outros factos interessantes que a seguir registamos nos deixam vêr que a acção dos portuguezes não se limitou tão sólamente ao conhecimento das plantas, a sua naturalisação e propagação nas colónias.

Os portuguezes pelas suas vitórias e descobertas dominaram o mundo inteiro durante quasi dois séculos e meio (1413-1656) até a morte de D. João IV o Restaurador.

Apezar da perseguição dos holandeses que se tinha apoderado de quasi todas as cidades fundadas no Brazil, tendo sido expulsos de Angola em 1648 por Salvador Correia de Sá e outros, o patriota João Fernandes Vieira em 1655 restaurou o Brazil.

Durante todo êste tempo contribuíram para o progresso das ciências, como a vêr vamos.

Não é só á Geografia e Astronomia, á Etnografia, á Botânica e á Zoologia que êles se dedicaram.

A Medecina geral e a tropical também lhes devem um quinhão do progresso.

Registamos aqui um e outro facto não como novidade, mas como *Old Wine in New Bottles* para os nossos filhos, da epopeia da nação portugueza, a sua Biblia sagrada que tem na história das nações a sua em páginas, com letras de ouro.

Os portuguezes desempenharam um papel importante na therapeutica nos séculos XV e XVI.

João de Barros, escritor muito esculpulozo, descreveu não só os sintomas do escorbuto, assinalou ainda a etiologia desta avitaminose ou carencia de diversos ácidos aminados.

E, o nosso épico descreveu no Canto V dos *Lusiadas* Est. 81 e 82 o escorbuto nos termos seguintes:

*Quem haverá que sem o ver o creia?
Que tão disformemente ali lhe incharam.
As gengivas na boca, que crescia
A carne e juntamente apodrecia.*

Apodrecia e'um fétido e o bruto cheiro que o ar visinho inficionava:

*Não tinhamos ali médico astuto.
Surgião sutil menos se achava;
Mas qualquer neste oficio pouco instructo.
Pela carne já podre assi cortava.
Como se fôra morta; e bem convinha.
Pois morto ficava quem a tinha.*

A Garcia da Orta se deve a primeira descrição dos sintomas caracteristicos da cólera e do tratamento desta terrivel partida para a discrição da epidemia que Gaspar Correia tendo presenciado na India em 1543, tão bem descreveu para facilitar o seu diagnóstico.

Foi o Padre Anchieta quem descreveu o primeiro marzupio americano que foi o ponto da Fauna. Foi tambem êste jesuita portuguez que deu de conhecer a séde do veneno ofidiano nos dentes das cobras venenosas.

A Castellani em 1907 chamou a atenção do mundo médico para o contagio da framboezia por certas moscas não vulnerantes que depois de chuparem as ulceras, iam em seguida poisar sobre feridas dos individuos sãos á quem transmitiam a doença.

A doença porém, era desde há muito conhecida dos portuguezes. Pouco mais de três séculos antes, Gabriel Soares de Souza em 1587 havia assinalado o facto dêste contagio.

Que mais nos resta para nossa gloria?

Não deixam êstes factos ver que os portuguezes lançaram as bases para os estudos Botanico-Farmacológicos durante o século XV e XVI?

Não há que duvidar.

Estes ultimos factos foram postos em evidência ainda há pouco pelo professor C. França n 1º Congresso de medicina tropical de Angola, da iniciativa do Alto Commissario, o general Norton de Matos.

Os trabalhos de Tomé Pires e os trabalhos de Garcia da Orta, João Fragoso e Cristovão da Costa, escritos no século XVI, são monumentos que atestam a obra Botanico-Farmacológica dos portuguezes.

Fechou finalmente Herédia em 1600 (1601?) o periodo activo dos descobrimentos — que os portuguezes tinham começado no primeiro quartel do século XV, antes que comesçassem a ser espoliados pelos holandeses e ingleses — com a descoberta da Australia ou Nova Hollanda, a terra de oiro, prata, cobre e uma variedade de cereais etc. etc.

Com a descoberta da Australia tivemos entre outros o *Eucalyptus globulus*, naturalizado na India Portuguesa e cuja cultura compete ao Estado promover nos sitios palustres, tanto mais que foi o Eucaliptol já ensaiado com proveito e preconizado na lepra, associado ao óleo de chaulmoogra, pelos leprólogos insignes, como Heiser, Brac, Robineau e outros.

IV

Que a natureza foi prodiga na distribuição de plantas, que a distribuição foi conforme as necessidades dos povos das regiões do globo, e que esta foi regulada conforme as condições físicas e geográficas, não há que duvidar.

Enquanto os egipcios e fenicios introduziam e propagavam muitas plantas nas regiões do Mediterraneo, e os arianos durante as suas migrações pela Europa entre 2000 a 2500 antes de Cristo, tambem introduziam muitas plantas na Asia ocidental, os portuguezes que nestes tempos andavam ocupados nas conquistas e descobrimentos,

ao voltar das suas longas expedições não deixaram de trazer para Portugal e para suas possessões ultramarinas, India em particular, novas plantas frutíferas que encontrassem em qualquer parte com o intuito de naturalizá-las com cultura intensa nos seus dominios.

Na naturalização das plantas exóticas nos seus dominios desempenharam os portugueses papel importante, tendo concorrido muito para a propagação das plantas dum para outro hemisferio a descoberta do caminho marítimo e da America, as conquistas, etc. como deixamos dito.

Não houve geração espontânea em parte alguma.

Chaque pays a ses produits.

Disse Buffon, « Hist. Nat. ».

Os vegetais, como os animais, obedeceram ao preceito Divino.

Et ait germinet terra herbam virentem et facientem semem, lignum pomiferum, fructus juxta semem suum Pen. cap. IV, 11 e 12.

Investigações paleontológicas deixam vêr que em parte alguma se viu nascer espontaneamente o arroz, o milho, a batata, a mandioca, a papaia, o coqueiro etc.

Os vegetais como os animais, tiveram também a sua etnografia.

Cada genero e cada especie teve a sua patria, o seu habitat.

Variações houve, e não há duvida.

Nos nossos jardins e hortas, até mesmo dum lugar para outro vemos variarem as plantas conforme o solo e outras circunstâncias do clima.

Houve-as também nos animais, como deixou bem demonstrado Darwin na sua obra *Variations of animals and plants under domestication*.

Se os vegetais, porém, aceitando-se a teoria da selecção e luta pela vida entre os animais, passaram dum hemisferio à outra região, é porque uma mão estranha os transportou para proveito seu e pelos cuidados que lhe dispensou, ou por outra, pela sua domesticação, não raras vezes, conseguiu boas variedades.

Essa mão para India é a dos portugueses que introduziram uma variedade de plantas nos seus, outrora, vastissimos dominios, para o que contribuíram muito as conquistas e descobrimentos.

Concluo o Cap. com uma ligeira nota sobre o nosso coqueiro cuja pátria foi por algum tempo disputada.

Não se sabe ao certo até hoje a data da sua introdução na India. E' certo, porém, que a sua cultura intensa começou em Ceilão. Abunda também no litoral das regiões quentes da Asia, Africa e America.

Joseph Acosta na *Hist. Nat. des Indes* diz ter visto no século XVI o coqueiro no Porto Rico, no arquipelago das Antilhas.

De Martins na *Hist. Nat. des Indes* diz ter visto os portugueses introduzindo o coqueiro na costa da Guiné, e que os viajantes Dampier e Vancouver nos principios do século XVII tinham observado vastas plantações dos coqueiros nas ilhas dos Cocos no arquipelago da Sonda.

Em varias ilhas de Asia tem-se observado o coqueiro em estado tanto selvagem como cultivado.

Supunha De Martins que os cocos tivessem sido transportados pelas correntes oceanicas do Pacifico, das ilhas da America para as do arquipelago indico.

As investigações dos botanicos modernos que observaram seu extenso habitat, desde há tres séculos, e os variados usos do coco na Asia mais que na America e os exames geológicos demonstraram que foi Asia a pátria do nosso coqueiro.

Apolonia de Tyane, citado por Pickering, *Chronological arrangement of Plants* viu o coqueiro no Indostão nos primeiros séculos da era Cristã.

A sua origem no arquipelago da India donde passou para Ceilão, fica também confirmada pelo facto que segue e que demonstra a sua muito antiga existencia nesta ilha.

Perto de Point de Gale, em Ceilão, diz o erudito Suman na *Flora Vitiensis*, se vê uma inscrição, numa rocha, do busto dum principe indigena, Kotha Raya, à quem se attribuia a descoberta dos usos do coco, desconhecidos antes dele, facto importante à que tambem faz referencia o Marawansa, cronica muito velha de Ceilão.

Cunsaulim, India Portuguesa, 30 de Abril de 1937.

SOBRE LOS ROEDORES PLATAEOMYS Y PSEUDOPALATAEOMYS

POR CARLOS RUSCONI

En 1933, p. 105 de estos mismos *Anales*, daba a conocer varias especies nuevas del piso chapadmalense, una de las cuales se refería a un interesante grupo de roedores octodontinos cuyos últimos representantes parecen haberse extinguido a mediados del plioceno argentino. Allí hice una breve historia del género y especie *Platacomys scindens* y recordaba que nuestro sabio Ameghino lo fundó en 1881, (vol. II, p. 306), con un incisivo descubierto en el piso ensenadense y que se distinguía, entre otras cosas, por su robustez y de forma parecida a la del género *Ctenomys*. Varios años después (1888, p. 8 y 1889, p. 161, lám. VII, figs. 9 y 10), el mismo paleontólogo refirió al mencionado género un cráneo y mandíbula completas exhumados del piso hermosense. Más tarde, Rovereto (1914, p. 62 etc.) describió varias especies nuevas sin advertir que esas no podían corresponder al género *Platacomys*.

Recién en el artículo arriba citado me apercibí del error en que habían incurrido involuntariamente tal vez, esos dos autores; pues, no podía creer que los restos fósiles hallados en terrenos prepampeanos debían ser incluidos en el género *Platacomys* sino a otro distinto y nuevo, el cual no lo fundé en aquella oportunidad por diversas razones.

Más o menos en la fecha en que había corregido las pruebas de mi artículo, Kraglievich independientemente y por otros conductos, llegaba a idénticos resultados con respecto al incisivo en cuestión en un trabajo que redactó en sus últimos tiempos y que vió a luz, años después de su muerte (1934). En esta monografía (p. 77), Kraglievich hizo un comentario acerca de este grupo de roedores y además propuso dos tesis. La primera consistía en que podía tomarse la fecha de 1888 para el genotipo de *Platacomys scindens* debiéndose utilizar en este caso el ejemplar procedente del hermosense y considerar como *nomen nudum* el *Platacomys scindens* de 1881. De

acuerdo a las leyes de nomenclatura zoológica vigente, esta proporción me parece inaceptable porque si bien es cierto que la pieza sobre la cual fundó Ameghino el mencionado género era muy incompleta, no había motivos suficientes para pensar en su eliminación desde el momento que el propio Kraglievich pudo darse cuenta de las diferencias morfológicas entre el incisivo de la pieza genotípica y el mismo órgano de los ejemplares del piso hermosense. Si el incisivo que sirvió de base al género era, según el propio Ameghino, muy parecido y más robusto que el de *Otenomys*, mejor hubiera sido entonces considerar a *Plataeomys scindens* de 1881 como un sinónimo o bien como una especie distinta de *Otenomys*. Infortunadamente ignoro cual es el paradero de la pieza genotípica y hasta tanto no se la halle y se la estudie con el fin de aclarar este asunto, la prudencia aconseja mantener a *Plataeomys scindens* de 1881 como un género dudoso en la lista de vertebrados del piso ensenadense.

La segunda tesis de Kraglievich consistía en conservar el nombre de *Plataeomys scindens* para el ejemplar genotípico de 1881 y dar un nuevo nombre genérico y específico a la pieza (cráneo y mandíbula) que el propio Ameghino consideró también como tal en 1888. Y para este caso Kraglievich propuso denominar *Pseudoplateaomys formosus* al primer ejemplar hallado en el piso hermosense, descrito por Ameghino en 1888 y figurado después por el mismo sabio en 1889 ⁽¹⁾.

Ahora bien, como este último criterio es, a mi modo de ver, el más correcto, lógicamente me impone entonces la tarea de hacer las siguientes modificaciones, aprovechando al mismo tiempo para dar la distribución geográfica y geológica de estos dos géneros de roedores octodontinos:

Gén: PLATAEOMYS AMEGH. 1881

Plataeomys scindens AMEGH. 1881

Plataeomys scindens AMEGHINO, *La antigüedad* etc. vol. II, p. 306.

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Contribución* etc. 1889, p. 161 (*in part*).

Plataeomys scindens RUSCONI, *Distribución* etc. 1936, p. 189 y 201.

Distribución: «Toscas» del río de la Plata, frente a Buenos Aires.

(1) A esta última tesis se ha adherido también el Dr. CASTELLANOS (1936, p. 34).

Antigüedad: piso ensenadense, plioceno superior ⁽¹⁾.

Gén. PSEUDOPLATAEOMYS KRAGL. 1934

1) **Pseudoplateomys formosus** KRAGL. 1934

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Lista de las esp. etc.* 1888, p. 6 (in part).

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Contribución etc.* 1889, p. 161, lám. VII, figs. 9 y 10.

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Segundo Censo*, 1898, p. 178 (in part).

Plataeomys scindens AMEGHINO, *Les form. sed.* 1906, p. 414, fig. 244.

Plataeomys scindens ROVERETO, *Los estratos arauc.* 1914, p. 137.

Pseudoplateomys formosus KRAGLIEVICH, *La antigüedad plioc.* 1934, p. 77 (el ejemplar tipo del género y de la especie es el descrito por Ameghino en 1888, y figurado en 1889, lám. VII, figs. 9 y 10).

Distribución: Monte Hermoso, al sur de la provincia de Buenos Aires.

Antigüedad: piso hermosense, plioceno inferior.

2) **Pseudoplateomys elongatus** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys elongatus ROVERETO, *Los estratos etc.* 1914, p. 62, fig. 28 a y b.

Plataeomys elongatus RUSCONI, *Nuevas especies etc.* 1933, p. 106.

Pseudoplateomys elongatus KRAGLIEVICH, *La antigüedad etc.* 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca y Mendoza.

Antigüedad: mioceno medio o sup., y piso tunuyanense, mioceno superior.

3) **Pseudoplateomys brevis** (ROV.) KRAGL. 1914

Plataeomys brevis ROVERETO, *Los estratos etc.* 1914, p. 64, fig. 29 a y b.

(1) En base a la siguiente distribución geológica, resulta entonces que el género *Plataeomys* hay que incluirlo en la fauna pampeana, y en la fauna araucocentrriana el género *Pseudoplateomys*, lo mismo que hice en otra oportunidad (1931) un desglosamiento similar con respecto a *Ctenomys* y *Dicelophorus*.

Plataeomys brevis RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 106.

Pseudoplateaomys brevis KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca.

Antigüedad: piso araucanense, mioceno superior.

4) ***Pseudoplateaomys innominatus* (ROV.) KRAGL. 1914**

Plataeomys innominatus ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 65, fig. 30.

Plataeomys innominatus RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 106.

Pseudoplateaomys innominatus KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Catamarca.

Antigüedad: piso araucanense, mioceno superior.

5) ***Pseudoplateaomys elongatus mendocinus* (ROV.) KRAGL. 1914**

Plataeomys elongatus var. *mendocinus* ROVERETO, *Los estratos* etc. 1914, p. 221.

Pseudoplateaomys elongatus var. *mendocinus* KRAGLIEVICH, *La antigüedad* etc. 1934, p. 79.

Distribución: Mendoza.

Antigüedad: piso tunuyanense, mioceno superior.

6) ***Pseudoplateaomys Castellanos* (RUSC.) 1933**

Plataeomys Castellanos RUSCONI, *Nuevas especies* etc. 1933, p. 107, fig. 1.

Distribución: Arroyo Chapar, Miramar, al sur de la provincia de Buenos Aires.

Antigüedad: piso chapadmalense, plioceno medio (es la especie más reciente del género).

BIBLIOGRAFIA

AMEGHINO, F., *La antigüedad del hombre en el Plata*, vol. II, París-Buenos Aires, 1881.

AMEGHINO, F., *Lista de las especies de mamíferos fósiles del mioceno superior de Monte Hermoso hasta ahora conocidas*, pp. 1-21, Buenos Aires, 1888.

- AMEGHINO, F., *Contribución al conocimiento de los mamíferos fósiles de la República Argentina*, en *Actas de la Academia Nacional de Ciencias en Córdoba*, vol. XXV, pp. 1-247, Buenos Aires, 1914.
- AMEGHINO, F., *Les formations sédimentaires du crétacé supérieur et du tertiaire de Patagonia*, en *Anales del Museo de Hist. Nat.* vol. VIII, pp. 1-568, Buenos Aires, 1906.
- CASTELLANOS, A., *Los sedimentos del pampeano inferior y del araucano en el Valle de los Reartes*, en *Publicaciones de la Fac. Cienc. Matemáticas, físico-químicas y Naturales de la Universidad Nac. del Litoral*. Publicación n° 6, pp. 1-110, Santa Fe.
- KRAGLIEVICH, L., *La antigüedad pliocena de las faunas de Monte Hermoso y Chapadmalal, deducidas de su comparación con las que le precedieron y sucedieron*, pp. 1-136, Imp. El Siglo Ilustrado, Montevideo, mayo 17 de 1934.
- ROVERETO, C., *Los estratos araucanos y sus fósiles*, en *Anal. Mus. Hist. Nat.* vol. VI, Buenos Aires, 1889.
- RUSCONI, C., *Las especies fósiles del género Ctenomys, con descripción de nuevas especies*, en *Anales de la Sociedad Científica Argentina*, vol. CXII, pp. 1-35, del separado, Buenos Aires, 1931.
- RUSCONI, C., *Nuevas especies de mamíferos terciarios procedentes del piso chapadmalense*, en *Anal. de la Soc. Cient. Argentina*, vol. CXV, pp. 105-113, Buenos Aires, 1933.
- RUSCONI, C., *Distribución de los vertebrados fósiles del piso ensenadense*, en *Bol. Acad. Nac. Ciencias en Córdoba*, vol. XXXIII, pp. 183-215, Buenos Aires, 1936.

BIBLIOGRAFÍA

OMBREDANNE, A., SUARES, N. et CANIVET, N., *Les inadaptés scolaires*. Paris. Hermann et Cie. éditeurs. 6, Rue de la Sorbonne, 6, 1936 = 84 pág. con 45 figuras en el texto.

Se trata de un folleto de alto valor técnico que forma parte del trabajo más general "Le problème des aptitudes a l'age scolaire".

Contiene una investigación efectuada sobre 21 escolares adolescentes, en un establecimiento de enseñanza media, que habían sido ap'azados en el curso y no podían por lo tanto ser promovidos al curso superior. La investigación se hizo sobre los siguientes análisis: Examen somático y psiquiátrico que llegó a descubrir verdaderos estados dramáticos interiores del niño, a menudo desconocidos para él mismo. Una serie de exámenes por *test* de edad y de aptitudes; aplicación de un *test* personal de aprovechamiento educacional; examen por el *test* de carácter de Rorschach aplicado con cuidado sobre las mismas bases establecidas por Rorschach. Se efectuó una comparación entre los resultados obtenidos entre sí, y entre ellos y las notas escolares de los niños.

Los *test* utilizados fueron los más consagrados, a saber: *test individual* de edad mental de Binet Terman; el *analítico* de inteligencia de Meili; el de *atención* de Pieron; los de *memoria* de Cloparède; los de *habilidad manual* de Walther.

Del análisis de los 21 sujetos sometidos a estudio se deduce la bondad y la seguridad del método adoptado, y la riqueza de conclusiones a que conduce, alcanzándose una certidumbre de clasificación, que había sido difícil obtener por otros caminos y otros tipos de *test*.

Después del análisis de los 21 sujetos los autores entran al estudio de los factores de la inadaptación escolar, encontrando una variación considerable de un caso a otro pero estableciendo que en general un adolescente que en los estudios medios ha presentado procesos difíciles y perturbaciones generales puede ser y es más tarde un hombre capaz de desenvolverse inteligentemente y alcanzar objetivos apreciables.

Aconsejan en definitiva no multiplicar en un mismo establecimiento un tipo uniforme de clase en que todos los alumnos se confundan sin selección; es preferible dividir el gran grupo de jóvenes en categorías por el tipo apropiado de enseñanza que conviene dar en cada una de estas categorías, lo cual es bastante sencillo y practicable en los establecimientos de gran población escolar.

N. B. M.

JARRY-GUÉROULT, R. J., *Le rapports limites de l'ordre et du libre arbitre dans l'évolution des sociétés humaines*. I. "Figuration cartesienne du fait social". Paris. Hermann et Cie. éditeurs. 6, Rue de la Sorbonne, 6, 1936. Un folleto de 64 páginas con 4 figuras y dos planchas.

Comprende dos capítulos: "Introducción a los métodos de la dinámica social" y "Relaciones límites del orden y del libre albedrío en la evolución de las sociedades humanas".

El autor estudia los progresos del pensamiento científico contemporáneos en relación a la idea del soberano Bien de Descartes, moral necesaria en las sociedades, categorías de la voluntad, introducción de la evidencia en los problemas de la dinámica social, utilizando los métodos perspectivos con las convenciones elementales por la figuración vectorial del medio social, llegando a la posición de control de la evolución y el postulado de la libertad.

El fin del trabajo —que se conduce constantemente por los métodos matemáticos— lleva a plantear este dilema; fines que comprende la libertad funcional interna del hombre, o su sujeción a mecanizaciones que lo encierran.

O estudia los hombres como mecanismos encerrados por otros mecanismos, ya —estos últimos— rigurosamente auténticos. Si esos hombres son, ellos mismos, mecanismos determinados, nada puede alterar la evolución que sufrieron y que sufrirán.

O están dotados de libre albedrío y conscientes de haber descubierto en el último siglo los secretos que le dan frente al mundo físico, como frente al mundo de las reglas y las convenciones que radican en cuarenta siglos de civilización agrícola un doble grado de libertad. En tal caso corresponde demandarse, ¿qué uso han hecho de esta doble libertad?

Y así se pregunta M. Jarry-Guéroult: a la liberación que ha traído a los hombres el invento de las máquinas, ¿ha correspondido una paralela liberación de las cadenas de un derecho social que no ha evolucionado cediéndose a la naturaleza de los hechos modificados?

Las dudas que se ofrecen en esta forma promete el autor examinarlas en siguientes publicaciones.

Plantea también el autor un ensayo de clasificación de los elementos utilizados en la vida social de la colmena humana; distinguir la rama de los “energotoros” de los “catalizadores”: en la primera distinguir la maquinaria sea mineral, animal o vegetal y clasificar enseguida los órdenes por rendimientos energéticos del mismo orden de magnitud.

Llamar género al conjunto de instrumentales que elaboran la misma calidad de productos; familia a las que funcionan en condiciones similares; especies a los que trabajan en condiciones rigurosamente idénticas. Así una máquina a vapor y un motor a combustión interna cuyo rendimiento varía de simple a triple estarían en dos órdenes distintos. La evolución de este instrumental desplaza formas anticuadas por nuevas, pero aquéllas pueden retornar al influjo de circunstancias de excepción, pero seguramente volverán reformadas por los progresos que la vida hace experimentar a todos. El hombre no se transforma así, pero su función va perdiendo su calidad instrumental lentamente, adquiriendo cada vez una calidad más directriz, planteándose así el problema referido de si la evolución es impulsada por el libre albedrío, o ceñida por la evolución del instrumental mecánico.

La civilización arrecia. Los pueblos de cultura más densa adquieren una posición de mayor equilibrio, y para lograrlo desalojan a los restantes de su alveolo arrancándolos de su quietud.

N. B. M.